

# Kombinatorická úloha o zmrzlinách

## Zadání:

máme 15 různých druhů zmrzliny, všechny stejně dobré, a tři polevy hodící se ke všem zmrzlinám. Kolik možností máme, jak si dát zmrzlinu?

## Poznámky k řešení:

- liší se zmrzlina do misky a do kornoutu, v kornoutu záleží na pořadí, v misce ne
- řešíme různé případy, zda se mohou druhy opakovat nebo ne
- rozlišíme, kolik kopečků si dáváme
- nejde o číselný výsledek, ale způsob výpočtu

## Řešení:

### 1 kopeček

**do kornoutu/misky** – nerozlišujeme, ani se nemohou opakovat + poleva  
 $15 \cdot 3$

### 2 kopečky

**do kornoutu a bez možnosti opakovat:**  $15 \cdot 14 \cdot 3$  15 možností, jak vybrat 1. kopeček, 14 jak druhý

**do kornoutu s možností opakovat:**  $15 \cdot 15 \cdot 3$  15 možností, jak vybrat 1. kopeček, 15 jak druhý

**do misky a bez možnosti opakovat:**  $\frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 3$  stejně jako u kornoutu bez opakování, ale možnosti musíme vydělit dvěma (jahodová a k ní malinová je v misce totéž jako malinová a k ní jahodová)

**do misky s možností opakovat:**  $\left(15 + \frac{15 \cdot 14}{2}\right) \cdot 3$  k možnosti bez opakování přidáme 15 možností, jak vybrat dva stejné kopečky

### 3 kopečky

**do kornoutu a bez možnosti opakovat:**  $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 3$

**do kornoutu s možností opakovat:**  $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 3$

**do misky a bez možnosti opakovat:**  $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3$  dělíme šesti, protože máme 6 možností, jak uspořádat tři druhy zmrzliny (3 možnosti na 1. kopeček, 2 možnosti na 2. kopeček, 1 možnost na 3. kopeček)

**do misky s možností opakovat:**  $\left(15 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 2}{(3 \cdot 2 \cdot 1)} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right) \cdot 3$  k možnosti 3 stejných kopečků (15)

přidáváme možnost dvou stejných a jednoho jiného ( $\frac{15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1}$  pro možnost prvního druhu  $2 \times$  a druhého  $1 \times$ , to samé při opačném poměru – prvního druhu  $1 \times$  a druhého druhu  $2 \times$ , a to celé  $3 \times$ , protože musíme brát v úvahu, kde bude ten první druh zmrzliny)

\*\*\*

### n kopečků, pro $n \leq 15$

**do kornoutu a bez možnosti opakovat:**  $15 \cdot 14 \cdot 13 \dots (15 - n + 1) \cdot 3$

jedná se o variace bez opakování:  $V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

zvláštní příklad je permutace, počet přeuspořádání n prvků:  $P(n) = n!$

**do kornoutu s možností opakovat:**  $15 \cdot 15 \cdot 15 \dots 15 \cdot 3 = 15^n \cdot 3$

jedná se o variace s opakováním:  $V'_k(n) = n^k$

**do misky a bez možnosti opakovat:**  $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \dots \cdot (15-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 1} \cdot 3$  dělíme  $n!$ , protože máme  $n!$  možností,

jak uspořádat tři druhy zmrzliny (n možností na 1. kopeček, n-1 možností na 2. kopeček, n-2 možností na 3. kopeček)

jedná se o kombinace bez opakování:  $K_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(n)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$

**do misky a s možností opakovat:**  $\frac{(15+n-1) \cdot (15+n-2) \dots \cdot 15}{n!} \cdot 3$

\*\*\* Kombinace s opakováním = výběr, kde nezáleží na pořadí s možností opakovat (**do misky s možností opakovat**) jsou docela náročné na intuitivní pochopení, proto na chvíli náš příklad ještě zjednoduším:

Máme 5 druhů zmrzliny a vybíráme do misky 3 s možností opakovat. Druhy označím písmeny A, B, C, D, E, výběr oddělím čtyřmi sloupkami na pět hromádek, jak jsou druhy použity:

A, A, A	●●●						
A, A, B	●●		●				
A, A, C	●●			●			
A, A, D	●●				●		
A, A, E	●●					●	
A, B, B	●		●●				
A, B, C	●		●		●		
A, B, D	●		●			●	
A, B, E	●		●				●
A, C, C	●			●●			
A, C, D	●			●		●	
A, C, E	●			●			●
A, D, D	●				●●		
A, D, E	●				●		●
A, E, E	●					●●	
B, B, B		●●●					
B, B, C		●●		●			
B, B, D		●●			●		
B, B, E		●●				●	
B, C, C		●		●●			
B, C, D		●		●		●	
B, C, E		●		●			●
B, D, D		●			●●		●
B, D, E		●			●		●
B, E, E		●				●●	
C, C, C			●●●				
C, C, D			●●		●		
C, C, E			●●			●	
C, D, D			●		●●		
C, D, E			●		●		●
C, E, E			●			●●	
D, D, D				●●●			
D, D, E				●●		●	
D, E, E				●		●●	
E, E, E					●●●		

Rozmístíme 3 druhy zmrzliny (trojice) do 5 přihrádek (celkový počet druhů), což vlastně znamená, že rozmístíme trojice a 4 sloupky, obecně  $k+n-1$  ( $k$  – kolik vybírám,  $n$  – z kolika celkem vybírám)

Tento celkový počet je uspořádaný, musím ho vydělit počtem rozmístění trojic ( $k!$ ) a rozmístěním sloupků ( $(n-1)!$ ) a dostaneme:

$$K'_k(n) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1-k)!} = K_k(n+k-1)$$