Řešení slovních úloh pomocí lineárních rovnic

Řešení slovních úloh představuje spojení tří, dnes bohužel nelehkých, úloh – porozumění čtenému textu (pochopení zadání), jeho matematizaci (převedení na rovnici) a vyřešení, včetně kontroly (zkoušky dosazením do zadání úlohy).
Svým způsobem je to pro běžného člověka ta nejdůležitější část matematiky (po seznámení se s čísly a možná základech geometrie), přesto působí největší obtíž.
Nejčastější úlohy se přitom omezují na několik typů:

Úlohy dopravní

Jde o úlohy, které využívají fyzikální vztah: rychlost (v) je určena změnou délky (Δs) za změnu času (Δt), chcete-li $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. V matematice se převážně řeší ideální úlohy, kde nedochází ke zrychlení ani zpomalení a pohyb je tedy rovnoměrný. Nejčastěji jde o úlohy, kde je společný (nebo nějak rozdělený) čas nebo dráha. Buď jedou dopravní prostředky proti sobě (případně s časovým rozdílem) nebo se dohánějí.

V těchto úlohách stačí použít vztah $v=\frac{s}{t}$, kde se rychlost, dráha a čas u jednoho odliší od druhého indexem (například $v_{traktor}=\frac{s_{traktor}}{t_{traktor}}$). A spojí se společnou drahou (např. $s=s_{traktor}+s_{motocykl}$ - to v případě, že motocykl vyjel naproti traktoru a znám vzdálenost jejich původních míst) nebo časem (např. $t_{motocykl}=t_{traktor}-\Delta t$ - pokud motocykl vyjel oproti traktoru o Δt později).

Společná práce

Dalším typem úloh jsou úlohy na společnou práci. Obvykle se skládá práce více lidí nebo napouští/vypouští bazén více kohoutky. V těchto úlohách se považuje cílový stav (splnění úkolu, napuštění bazénu) za celek a příspěvky jednotlivých dílčích přispěvatelů (pracovníků, kohoutků) za zlomky celku. Některé jsou známé, jiné ne, sestavuji rovnici, ve které příspěvky (zlomky, kde v čitateli je přidaný příspěvek a ve jmenovateli samostatná délka výkonu) dávají dohromady celek, tedy 1.

Směsné úlohy

V těchto úlohách se jedna směs, jejíž složení se dá vyjádřit, mění většinou přidáním jedné složky na novou směs, jejíž složení dokážeme také vyjádřit. Jen v tom vyjádření směsi se obvykle nějaká složka musí dopočítat.

Úlohy s čísly

Obvykle jde o úkony s čísly, které jsou popsány slovně. Jde tedy o to je jen zapsat matematicky.

Trojčlenka

Používá se tam, kde jde o poměr nějakých veličin. Nejčastěji v podobě úloh z procenty.

Např.

procenta %...................část
100 %...........................celek

Použití: $\frac{\text{procenta}}{100}=\frac{\text{část}}{\text{celek}}$

Soustavy lineárních rovnic

Obecně se dá každá soustava lineárních rovnic zapsat jako:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1\\
&a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2\\
&\ldots\\
&a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+a_{m3}\cdot x_3+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m
\end{aligned}
$$

Řešit soustavu rovnic znamená najít takovou n-tici čísel, které mohu dostadit za neznámé, pro které má každá rovnice smysl a rovná se levá i pravá strana.

Univerzální postup se jmenuje **Gaussova eliminační metoda** a používá se tak, že druhou, třetí až poslední rovnici vynásobíme takovým nenulovým číslem, abychom u prvního x dostali číslo opačné k číslu a_{11}. Když každou rovnici sečteme s první, dostaneme tak rovnice, které mají o jednu neznámou méně a je jich o jednu méně než na začátku. To opakujeme tak dlouho, dokud:

1) nedostaneme jednu lineární rovnici o jedné neznámé. Z ní určíme jednu neznámou a dosazujeme zpět a dopočítáváme ostatní neznámé.
2) nedostaneme více lineárních rovnic o jedné neznámé. Pokud ta neznámá vychází v každé z rovnic jiná, pak rovnice nemá řešení. Pokud vychází stejná, dosazujeme zpět a dopočítáváme ostatní neznámé.
3) nedostaneme jednu lineární rovnici o více neznámých. Pak bude řešení nekonečně mnoho a budou se vyjadřovat parametricky.

My se omezíme na menší počet rovnic a menší počet neznámých. Tím se řešení zjednoduší, i když v sobě obsahuje výše zmíněný obecný postup.

Sčítací metoda: Vychází ze zmíněného postupu. Rovnice vynásobíme takovými čísly, abychom se při jejich součtu zbavili jedné neznámé. Lineární rovnici (kterou jsme takto získali) o jedné neznámé vyřešíme a dosadíme do jedné z původních rovnic, abychom dostali druhou neznámou. Řešení zapisujeme jako uspořádanou dvojici čísel, zkoušku provádíme dosazením za neznámé v obou rovnicích.

Příklad 1:

$$
\begin{array}{lll}
2\cdot x-4\cdot y=7 & \vdots & \cdot(-3)\\
3\cdot x+5\cdot y=8 & \vdots & \cdot 2\\
\hline
-6\cdot x+12\cdot y=-21 & & \\
6\cdot x+10\cdot y=16 & & \\
\hline
\quad 22\cdot y=-5 \quad \Rightarrow y=-\dfrac{5}{22} & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$-6\cdot x+12\cdot\left(-\frac{5}{22}\right)=-21$$

$$-6\cdot x-\frac{60}{22}=-21$$

$$-6\cdot x-\frac{30}{11}=-21 \quad \vdots \quad \cdot(-11)$$

$$66\cdot x+30=231 \quad \vdots \quad -30$$

$$66\cdot x=201 \quad \vdots \quad :66$$

$$x=\frac{201}{66}=\frac{67}{22}=3\frac{1}{22}$$

$$P=\left\{\left[\frac{67}{22};-\frac{5}{22}\right]\right\}$$

Zkouška:

$$1.\,rovnice: 2\cdot\frac{67}{22}-4\cdot\left(-\frac{5}{22}\right)=\frac{134}{22}+\frac{20}{22}=\frac{154}{22}=7$$

$$2.\,rovnice\ 3\cdot\frac{67}{22}+5\cdot\left(-\frac{5}{22}\right)=\frac{201}{22}-\frac{25}{22}=\frac{176}{22}=4$$

Příklad 2:

$$\begin{array}{l} 7\cdot x-15\cdot y=45 \quad \vdots\cdot 2 \\ \underline{-14\cdot+30\cdot y=81} \\ 14\cdot x-30\cdot y=90 \\ \underline{-14\cdot x+30\cdot y=81} \\ \qquad 0=9 \end{array}$$

Pokud při úpravě vyjde nesmysl, jako v tomto případě, pak soustava rovnic nemá řešení: $P=\{\}$

Příklad 3:

$$\begin{array}{l} -15\cdot x+20\cdot y=-75 \quad \vdots \quad :5 \\ \underline{21\cdot x-28\cdot y=105 \quad \vdots} \quad :7 \\ -3\cdot x+4\cdot y=-15 \\ \underline{3\cdot x-4\cdot y=15} \\ \quad 0=0 \end{array}$$

Pokud při úpravě zjistíme, že jedna rovnice je násobkem druhé, pak má soustava nekonečně mnoho řešení, které jsou spojeny vztahem mezi neznámými. Proto jednu neznámou nahradíme parametrem, představujícím libovolné reálné číslo a druhé vyjádříme s pomocí rovnice. V tomto případě například:

$$x=t\wedge -3\cdot t+4\cdot y=-15\Rightarrow 4\cdot y=3\cdot t-15\Rightarrow y=\frac{3}{4}\cdot t-\frac{15}{4}$$

Potom $P=\left\{\left[t;\frac{3}{4}\cdot t-\frac{15}{4}\right]\right\}$

Dosazovací metoda: Z jedné rovnice si jednu neznámou vyjádříme pomocí druhé neznámé a dosadíme do druhé rovnice. Tím dostaneme jednu lineární rovnici o jedné neznámé.

Příklad 1:

$$\begin{array}{l} 2\cdot x-4\cdot y=7 \\ \underline{3\cdot x+5\cdot y=8} \\ 2\cdot x=7+4\cdot y\Rightarrow x=\frac{7}{2}+2\cdot y \\ 3\cdot\left(\frac{7}{2}+2\cdot y\right)+5\cdot y=8 \\ \frac{21}{2}+6\cdot y+5\cdot y=8 \\ -11\,y=8-\frac{21}{2} \\ y=\frac{21-16}{22}=\frac{-5}{22} \\ x=\frac{7}{2}+\frac{2\cdot(-5)}{22}=\frac{7\cdot 11-10}{22}=\frac{67}{22} \end{array}$$

Což vyšlo i předešlým způsobem.

Porovnávací metoda: Obě rovnice upravíme tak, že vyjádříme stejnou neznámou pomocí druhé neznámé. Pak porovnáme obě strany a tím dostaneme jednu lineární rovnici o jedné neznámé.

Otázka správnosti

Porovnávací metoda je pochopitelná a ověřitelná – mají-li platit obě rovnice pro řešení (dvojici čísel), pak se musí neznámá vyjádřená v první a druhé rovnici pomocí druhé neznámé a čísel rovnat.
Dosazovací metoda je na tom stejně. Neznámá vyjádřena z jedné rovnice a dosazená do druhé musí odpovídat oběma rovnicím. Sčítací metoda platí také, i když její ověření (to, že nahrazení rovnice součtem dvou rovnic) spadá do jiné kapitoly matematiky (matice).

$$2\cdot x-4\cdot y=7$$
$$3\cdot x+5\cdot y=8$$
$$2\cdot x=7+4\cdot y\Rightarrow x=\frac{7}{2}+2\cdot y$$
$$3\cdot\left(\frac{7}{2}+2\cdot y\right)+5\cdot y=8$$
$$\frac{21}{2}+6\cdot y+5\cdot y=8$$
Opět vyšel stejný výsledek.
$$-11\,y=8-\frac{21}{2}$$
$$y=\frac{21-16}{22}=\frac{-5}{22}$$
$$x=\frac{7}{2}+\frac{2\cdot(-5)}{22}=\frac{7\cdot 11-10}{22}=\frac{67}{22}$$

Závěr: všechny tři metody vedou (musí vést) ke stejného výsledku. Rozhodnutí, kterou zvolit, je vždy na řešiteli. Všeobecně: metoda sčítací je univerzální, použitelná vždy a všude; metoda porovnávací je výhodná tam, kde jsou stejné neznámé snadno vyjádřitelné a metoda dosazovací tam, kde se vyhneme zlomkům.
U tří rovnic o třech neznámých poslední metoda ztrácí smysl. Buď použijeme sčítací ve smyslu vyloučení jedné neznámé ze dvou rovnic (a převedení na soustavu dvou rovnic o dvou rovnicích) nebo dosazovací, kdy z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do zbývajících dvou rovnic (čímž dojde na převedení na soustavu dvou rovnic o dvou rovnicích).

Příklad 4:

$$-3\cdot x-7\cdot y+4\cdot z=-5$$
$$-2\cdot x+6\cdot y=-10$$
$$4\cdot x+5\cdot y-4\cdot z=1$$

Zde se přímo vnucuje sčítací metoda. Sečtením první a třetí rovnice dostaneme rovnici bez neznámé z, což nám spolu s druhou rovnicí, zjednoduší soustavu na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$-2\cdot x+6\cdot y=-10$$
$$x-2\cdot y=-4$$
$$-x+3\cdot y=-5$$
$$x-2\cdot y=-4$$
$$y=-9$$

Dosadíme za x a y do první nebo třetí rovnice a dopočítáme z .

$$x-2\cdot(-9)=-4\Rightarrow x=-22$$
$$-3\cdot(-22)-7\cdot(-9)+4\cdot z=-5$$
$$66+63+4\cdot z=-5$$
$$4\cdot z=-134$$
$$z=-33{,}5$$

Zkouška:
$$1.\,rovnice:-3\cdot(-22)-7\cdot(-9)+4\cdot(-33{,}5)=66+63-134=-5$$
$$2.\,rovnice:-2\cdot(-22)+6\cdot(-9)=44-54=-10$$
$$3.\,rovnice:4\cdot(-22)+5\cdot(-9)-4\cdot(-33{,}5)=-88-45+134=-133+134=1$$

Výsledek: $P=\{[-22;-9;-33{,}5]\}$

Příklady:

$$x-2\cdot y-4\cdot z=5$$
$$6\cdot y+8\cdot z=-10$$
$$6\cdot x+7\cdot y+8\cdot z=-1$$

$P=\{[1{,}8;-1{,}8;0{,}1]\}$

$$7\cdot x+y+8\cdot z=-3$$
$$-12\cdot x-2\cdot y-13\cdot z=9$$
$$6\cdot x+1\cdot y+4\cdot z=8$$

$P=\{[52;-86;-54{,}5]\}$

$$-2\cdot x+2\cdot y-4\cdot z=-6$$
$$x+y+4\cdot z=-1$$
$$10\cdot x-3\cdot y+7\cdot z=10$$

$$P=\{[0{,}1;-2{,}3;0{,}3]\}$$

$$-4\cdot x-4\cdot y+4\cdot z=-8$$
$$-3\cdot x+4\cdot y+2\cdot z=-4$$
$$-4\cdot x-2\cdot y+4\cdot z=-10$$

$$P=\{[-6;-1;-9]\}$$

$$-8\cdot x-5\cdot y+5\cdot z=-4$$
$$8\cdot x-6\cdot y-9\cdot z=-9$$
$$-9\cdot x+3\cdot y-3\cdot z=7$$

$$P=\left\{\left[-\frac{1}{3};1\frac{2}{9};-\frac{1}{9}\right]\right\}$$