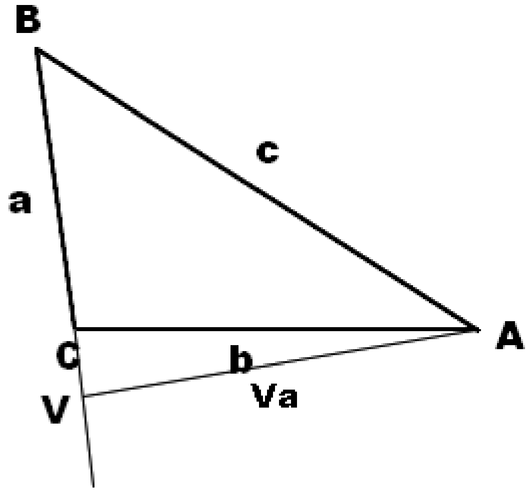
Sinová věta

V obecném trojúhelníku (jehož strany jsou různě dlouhé a žádný z úhlů nemá velikost 90°) neplatí pro vztahy mezi stranami Pythagorova věta. Přesto pro vztahy mezi úhly a velikostmi stran platí určité závislosti. Podívejme se na ně:



Výška na stranu a je kolmá na stranu a, proto platí $\sin\beta=\frac{v_a}{c}$.

Úhel doplňkový k úhlu γ má velikost $180°-\gamma$. Pro tento úhel platí $\sin(180°-\gamma)=\frac{v_a}{b}$. Pro trojúhelník na obrázku je $\gamma>90°$ (trojúhelník je tupoúhlý) a jeho $\sin(180°-\gamma)=\sin\gamma$, pak tedy $\sin\gamma=\frac{v_a}{b}$.

Vyjádříme-li $v_a=b\cdot\sin\gamma$ a $v_a=c\cdot\sin\beta$, pak, protože $v_a=v_a$, platí $b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta$. A z toho vyplývá $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Pro ostatní výšky dostaneme podobné vztahy a postupně platí $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ a $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$. A tedy i $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$. Tomuto vztahu říkáme **sinová věta**.

Cosinová věta

Cosinová věta (známá i z filmu *Cesta do hlubin študákovy duše* *http://www.youtube.com/v/jToxVdlGE40&hl=cs_CZ*) nezní „Lomikare, Lomikare, do roka a do dne...“ ale úplně jinak. Vyjdeme ze stejného obrázku a stejného trojúhelníku.

Z pravoúhlého trojúhelníku ACV platí $\cos(180°-\gamma)=\frac{|CV|}{b}$, tedy $|CV|=b\cdot\cos(180°-\gamma)$, a

$\sin(180°-\gamma)=\frac{v_a}{b}$, tedy $v_a=b\cdot\sin(180°-\gamma)$.

Podle tabulek $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x$, tedy

$\sin(180°-\gamma)=\sin 180°\cdot\cos\gamma-\sin\gamma\cdot\cos 180°=0-\sin\gamma\cdot(-1)=\sin\gamma$

Podle tabulek $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin y\cdot\sin x$, tedy

$\cos(180°-\gamma)=\cos 180°\cdot\cos\gamma-\sin\gamma\cdot\sin 180°=-1\cdot\cos\gamma-0=-\cos\gamma$

Z pravoúhlého trojúhelníku AVB platí $v_a^2+(a+|CV|)^2=c^2$.

$(b\cdot\sin\gamma)^2+(a+b\cdot(-\cos\gamma))^2=c^2$

$b^2\sin^2\gamma+a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma+b^2\cdot\cos^2\gamma=c^2$

$b^2\sin^2\gamma+b^2\cdot\cos^2\gamma+a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma=c^2$

$b^2\cdot(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)+a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma=c^2$

$b^2+a^2-2\cdot a\cdot b\cos\gamma=c^2$

Obecně **cosinová věta**: $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$, $a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha$, $b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$