Prostá funkce

Pro funkci platí, že pro všechna x z definičního oboru existuje právě jedno y z oboru hodnot, každému x je přiřazeno právě jedno y.
Kdybychom v předpisu prohodili x a y, dostaneme jiný předpis. U něj ale toto pravidlo všeobecně neplatí.
Prostá funkce je taková, že každé y z oboru hodnot odpovídá právě jednomu x z definičního oboru.
Funkce f je prostá, jestliže $\forall x \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
Zároveň platí, je-li funkce rostoucí nebo klesající, pak je i prostá (obráceně to neplatí).

Příklad:

Rozhodněte u následujících funkcí, zda jsou prosté:

a) $y=5\cdot x-7$ b) $y=-2\cdot x^2+6\cdot x-9$ c) $y=x-|x+1|$

d) $y=x^3$ e) $y=\dfrac{2}{x-3}+4$ f) $y=3^x$

Řešení:

a) grafem je přímka, každé y odpovídá právě jednomu x, funkce je prostá
b) grafem je parabola, kromě vrcholu $\left[\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right]$ všechna ostatní $y \in \left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)$ odpovídají dvěma různým hodnotám x, funkce není prostá
c) grafem funkce jsou polopřímky: $x \in (-\infty;-1\rangle : y=2\cdot x+1$; $x \in \langle -1;\infty\rangle : y=-1$, už samotná druhá přímka (rovnoběžná s osou x) říká, že pro různá x dostaneme stejné y, funkce není prostá
d) funkce je rostoucí a lichá, z grafu víme, že různá y odpovídají vždy jednomu x, funkce je prostá
f) grafem je exponenciála, každé y odpovídá právě jednomu x, funkce je prostá

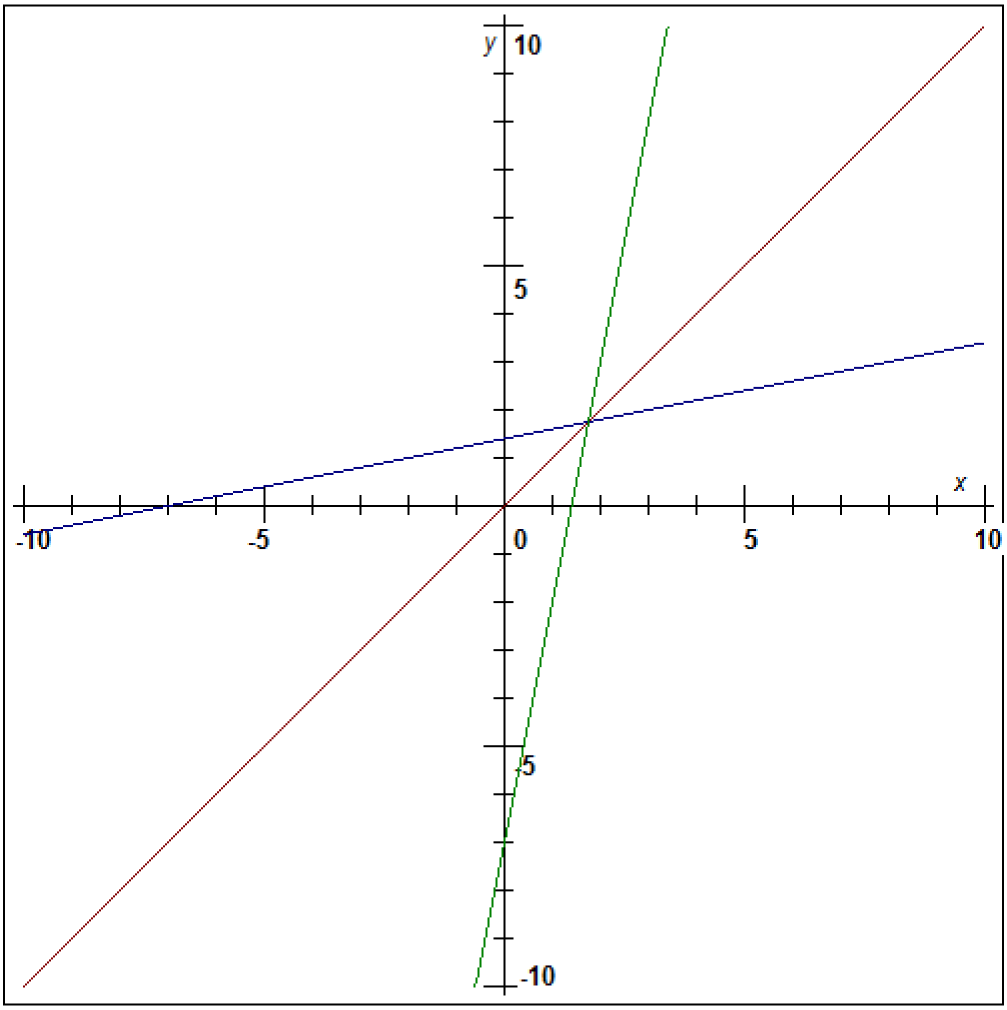
Inverzní funkce

Podle osy 1. a 4. kvadrantu (grafu funkce $y=x$) je soustava souřadnic souměrná sama se sebou, osa x přejde na osu y a obráceně. Všechny dvojice funkcí, které jsou takto souměrné, nazýváme inverzní funkce.
Protože dochází k „prohození“ hodnot x a y, mají tyto funkce „prohozený“ předpis – předpis jedné získáme z druhé tak, že upravíme předpis tak, že vyjádříme x pomocí y a získáme (záměnou x za y) tak předpis druhé funkce.
Funkce inverzní k prosté funkci f je f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1})=H(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které platí $y=f(x)$.

Příklad 1:

Funkce $y=5\cdot x-7$ má inverzní funkci $y=\frac{x}{5}+\frac{7}{5}$. Pro obě funkce platí $D(f)=\mathbb{R}$ a $H(f)=\mathbb{R}$.



Kontrola předpisu:

$y=5\cdot x-7$

$x=5\cdot y-7$

$x+7=5\cdot y$

$\frac{x}{5}+\frac{7}{5}=y$

$y=\frac{x}{5}+\frac{7}{5}$

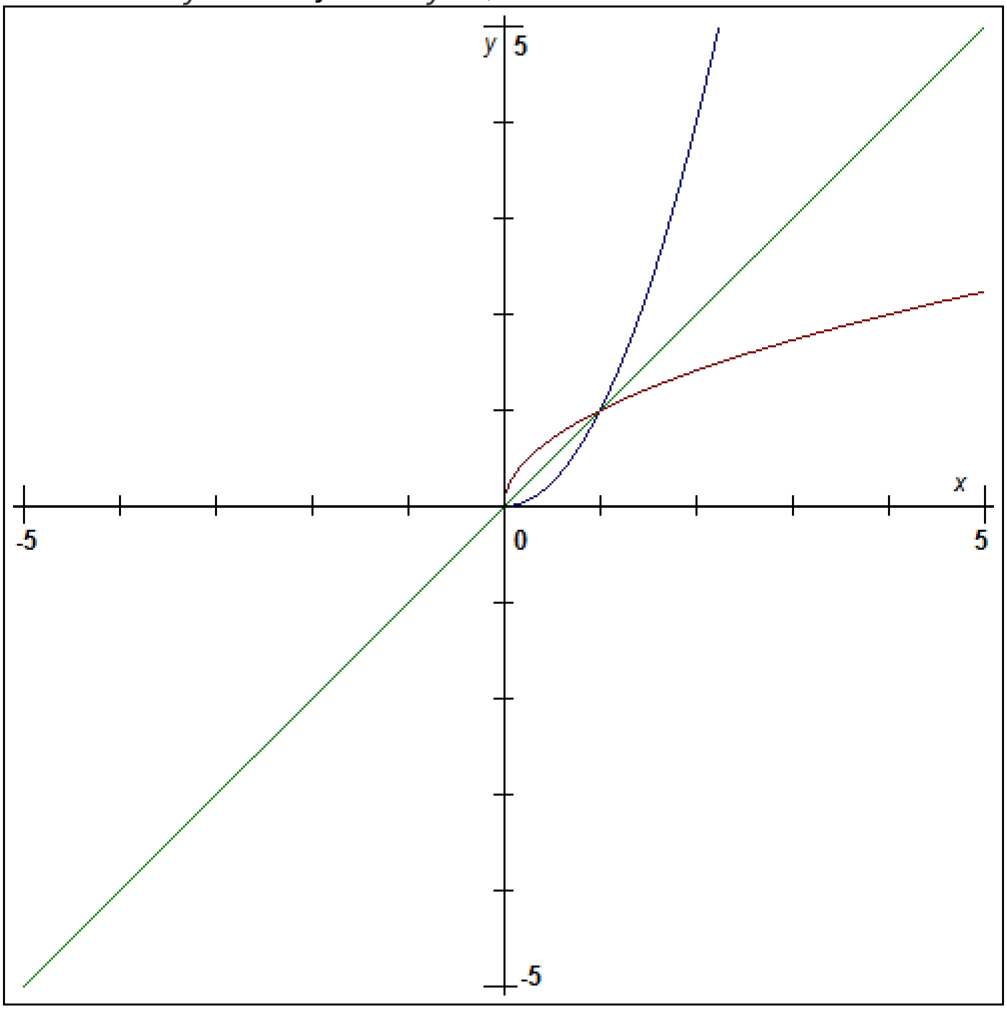
Příklad 2:

Co s funkcí $y=x^2$? Kdybychom omezili definiční obor pouze na nezáporná x, pak by k ní inverzní funkce existovala.

$D(f)=\langle 0;\infty)$; $H(f)=\langle 0;\infty)$

u inverzní funkce $D(f^{-1})=\langle 0;\infty)$; $H(f^{-1})=\langle 0;\infty)$

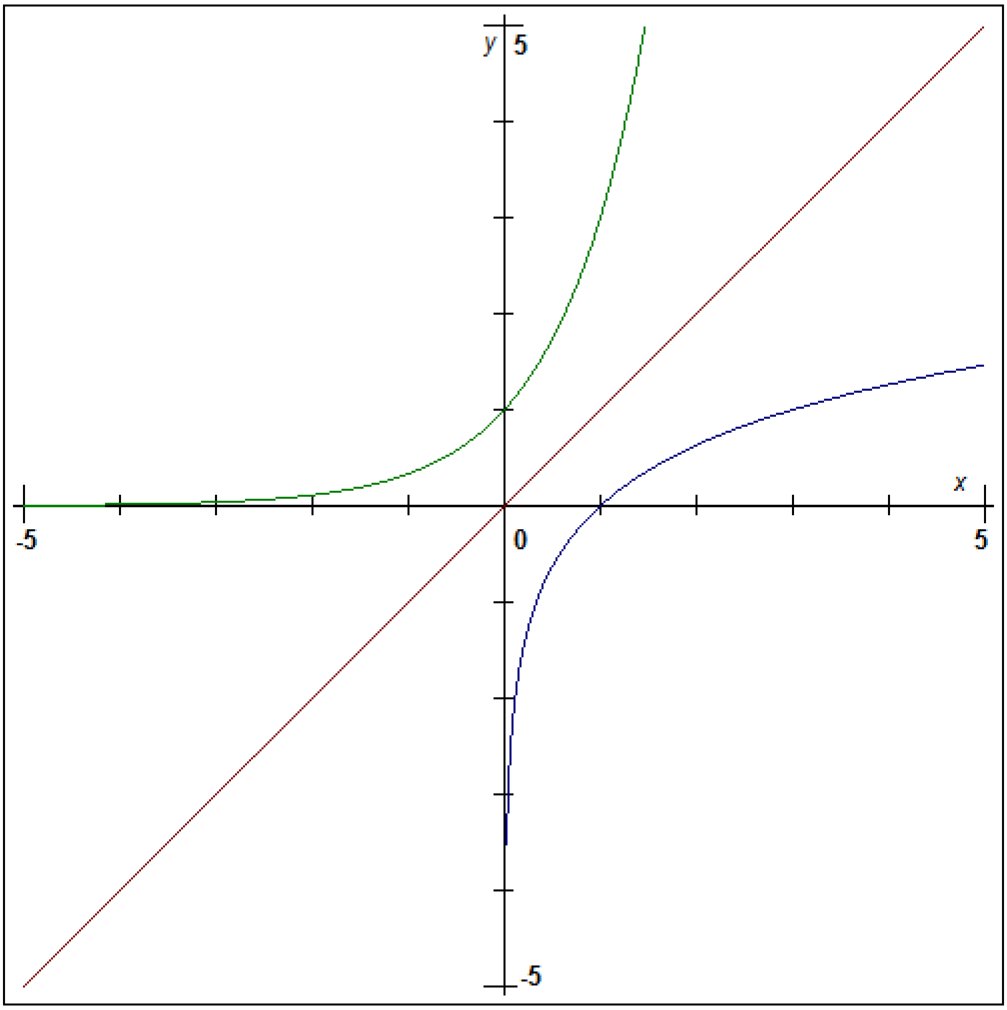
Dále musí platit $f^{-1}: x=y^2$, tedy $f^{-1}: y=\sqrt{x}$.



Příklad 3:

Funkce $f : y = 3^x$ má $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = (0 ; \infty)$.

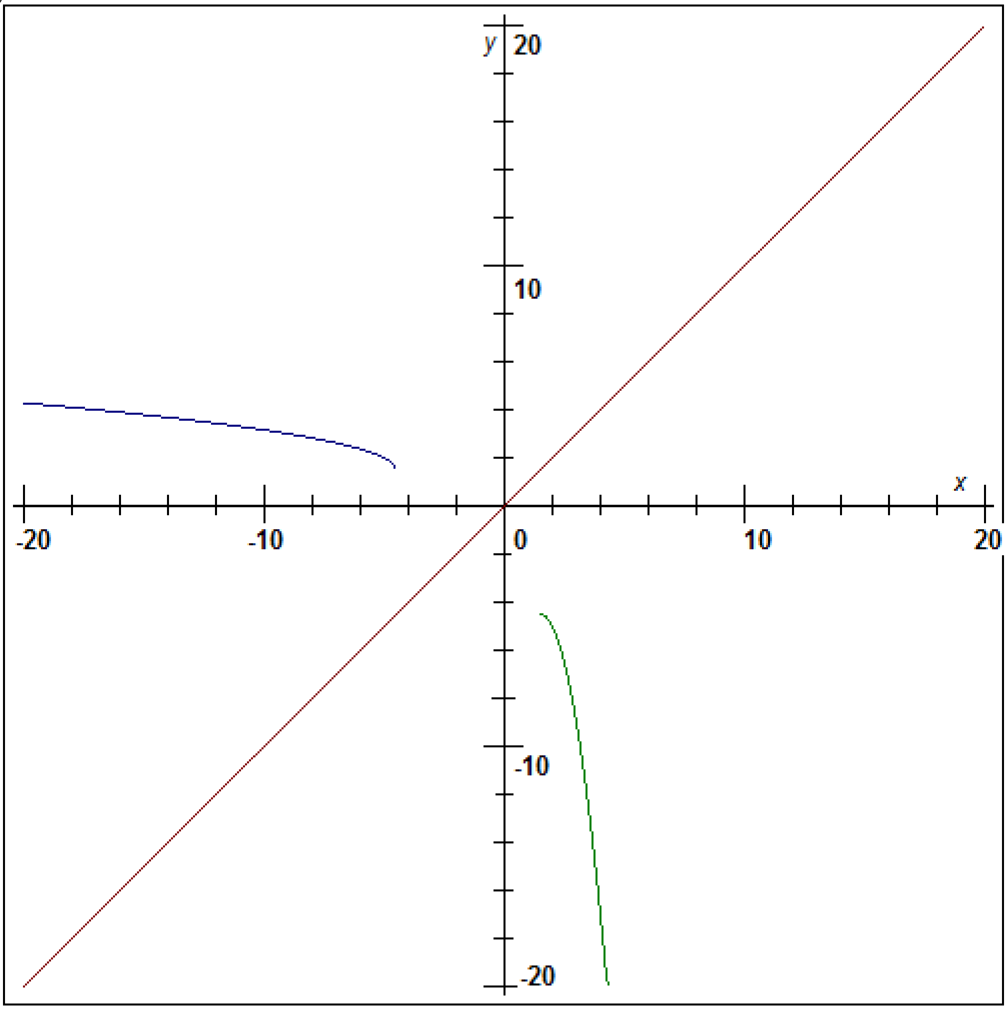
Funkce k ní inverzní bude mít $D(f) = (0 ; \infty)$; $H(f) = \mathbb{R}$.



Příklad 4:

Funkce $y=-2\cdot x^2+6\cdot x-9$ nemůže mít inverzní funkci, ale pokud omezíme obor hodnot pouze na interval, kde je funkce klesající (nebo rostoucí), pak inverzní funkci mít bude.

pro $x\in\left\langle \frac{3}{2};\infty\right)$ to bude funkce $y=\sqrt{\frac{-x}{2}-\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}$



$$y=-2\cdot x^2+6\cdot x-9$$
$$x=-2\cdot y^2+6\cdot y-9$$
$$x=-2\cdot\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}$$
$$x+\frac{9}{2}=-2\cdot\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)$$
$$-\frac{x}{2}-\frac{9}{4}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{-\frac{x}{2}-\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}=y$$

pro $x \in \left(-\infty ; \frac{3}{2}\right\rangle$ to bude funkce $y = -\sqrt{\frac{-x}{2} - \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$