1. K přímce *a* dané obecnou rovnicí $3\cdot x-2\cdot y+6=0$ najděte rovnici přímky *b* kolmé k přímce *a* a procházející bodem B [3; -7]. Určete jejích průsečík.

přímka *b* je kolmá k přímce *a* $\vec{n}_a=\vec{b}$

parametrická rovnice přímky *b* $b: x=3+3\cdot t\,;\,y=-7-2\cdot t\,;\,t\in\mathbb{R}$

průsečík je bod ležící na obou přímkách, tedy x-ová a y-ová souřadnice bodu na obou přímkách je stejná. Z parametrické rovnice mohu vzít výraz roven x a výraz roven y a dosadit je do obecné rovnice druhé přímky:

$$3\cdot(3+3\cdot t)-2\cdot(7-2\cdot t)+6=0$$

$$13\cdot t=1\Rightarrow t=\frac{1}{13}$$

$$x=\frac{42}{13}\,;\,y=\frac{89}{13}$$

2. Určete vzájemnou polohu přímek *p* a *q*. Jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost, jsou-li různoběžné, určete jejich průsečík a odchylku.
   a) $p: y=3\cdot x-12$ ; $q: x=1+2\cdot t\,;\,y=4+6\cdot t\,;\,t\in\mathbb{R}$

$\vec{n}_p=(3\,;-1)\,;\vec{q}=(2\,;6)$ , nemusím určovat normálový vektor přímky q, protože vidím, že $3\cdot 2+-1 ¿\cdot 6 ¿=0=\vec{n}_p\cdot\vec{n}_q$ a přímky jsou rovnoběžné; určím vzdálenost bodu Q[1; 4] od přímky p:

$$|pQ|=\frac{|3\cdot 1+(-1)\cdot 4-12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{13}{10}$$

b) $p: x=5\cdot r\,;\,y=-3+2\cdot r\,;\,r\in\mathbb{R}$ ; $q: 3\cdot x-y+10=0$

$\vec{p}=(5\,;2)\,;\vec{n}_q=(3\,;-1)$ ; kolmost vektorů není na první pohled zřejmá (jako v předcházejícím příkladě), přímky nebudou rovnoběžné, budou tedy různoběžné a mohu určit průsečík a odchylku. Průsečík zjistím dosazením *x* a *y* z vyjádření přímky *p* do obecné rovnice přímky *q*, určím *r* a spočítám *x* a *y*.

$$3\cdot(5\cdot r)-(3+2\cdot r)+10=0\Rightarrow 13\cdot r=-7\Rightarrow r=-\frac{7}{13}$$

$$x=-\frac{35}{13}\,;\,y=-\frac{53}{13}$$

Na odchylku potřebuji dva „stejné“ vektory (tedy buď dva směrové nebo dva normálové) $\vec{q}=(1\,;3)$

$$\cos\varphi=\frac{|5\cdot 1+2\cdot 3|}{\sqrt{5^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{11}{\sqrt{290}}\Rightarrow\varphi=49^\circ 46'$$

3. Vymyslete si libovolné rovnice dvou různých přímek a určete jejich vzájemnou polohu.

záleží na vašem zadání

4. K přímce *k* dané parametrickou rovnicí $x=-3+4\cdot t\,;\,y=4-3\cdot t\,,\,t\in\mathbb{R}$ najděte obecnou rovnici přímky *l*, která je s přímkou k rovnoběžnou a prochází počátkem soustavy souřadnic.

rovnoběžná přímka má stejný směrový i normálový vektor; $\vec{k}=(4\,;-3)\Rightarrow\vec{n}_k=(3\,;4)=\vec{n}_l$

obecná rovnice přímky *l* bude mít tvar: $3\cdot x+4\cdot y+c=0$ ; parametr *c* se určí podle toho, jakým bodem přímka prochází; protože prochází počátkem soustavy souřadnic O[0; 0]; bude c = 0 (dosadíme-li souřadnice tohoto bodu do rovnice, která musí mít řešení a musí platit, pak c vychází 0)

obecná rovnice přímky *l* má tvar: $3\cdot x+4\cdot y=0$

5. Napište rovnici přímky, která prochází bodem M [3; 5] a má od přímky dané rovnicí $2\cdot x-3\cdot y+6=0$ odchylku $\varphi=\frac{\pi}{4}$ .

z obecné rovnice pro druhou přímku platí $a\cdot 3+b\cdot 5+c=0$

ze vzorce pro odchylku: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2\cdot a+(-3)\cdot b|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}=|2\cdot a-3\cdot b|$

Pro zjednodušení si mohu jednu souřadnici (například *a*) směrového vektoru zvolit 1 (rozmyslete si, proč). Pak z druhé rovnice dostaneme: $\sqrt{26}\cdot\sqrt{1+b^2}=2\cdot|2-3\cdot b|$

$$26\cdot b^2+26=16-48\cdot b+36\cdot b^2$$
$$10\cdot b^2-48\cdot b-10=0$$
$$5\cdot b^2-24\cdot b-5=0$$
$$b_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{576+100}}{10}\Rightarrow b_1=5\wedge b_2=\frac{1}{5}$$

z obecné rovnice (pořád $a=1$ ) potom *c* vychází $c_1=-28\wedge c_2=-4$

Obecná rovnice pak má tvar $x+5\cdot y-28=0$ nebo druhá po úpravě (vynásobení 5) $5\cdot x+y-20=0$

6. Určete *p* tak, aby přímka $x=1+3\cdot t\,,\,y=-3+2\cdot t\,,\,t\in\mathbb{R}$ byla kolmá k přímce $y=p\cdot x+4$ . Určete jejich průsečík.

Pro kolmost přímek v těchto tvarech platí, že směrový vektor jedné přímky je lineárně závislý s normálovým vektorem $\vec{p}=(3\,;2)=k\cdot\vec{n}_q=k\cdot(p\,;-1)\Rightarrow k=-2\Rightarrow p=-\frac{3}{2}$

průsečík: $-3+2\cdot t=-3\cdot 2\cdot(1+3\cdot t)+4\Rightarrow t=\frac{1}{20}$

$$x=\frac{23}{20};\,y=-\frac{58}{20}$$

7. Na přímce $p: x-3\cdot y+13=0$ nalezněte body, které mají od přímky $q: x+2\cdot y+3=0$ vzdálenost $\sqrt{5}$.

ze vzorce pro vzdálenost bodu od přímky plyne: $\sqrt{5}=\frac{|x+2\cdot y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, kde *x* a *y* jsou souřadnice bodu na druhé přímce, musí tedy platit z přímky *p*: $x=3\cdot y-13$

$$\sqrt{5}=\frac{|3\cdot y-13+2\cdot y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}\Rightarrow 5=|5\cdot y+10|; y_1=-1\wedge y_2=-3\Rightarrow x_1=-16\wedge x_2=-21$$

Body $X_1[-16;-1], X_2[-21;-3]$

8. Určete parametr c tak, aby přímka $x+y+c=0$ měla od počátku soustavy souřadnic vzdálenost 5. Určete odchylku této přímky od osy x.

nejdříve dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky souřadnice počátku soustavy souřadnic O[0; 0]

$$5=\frac{|c|}{\sqrt{1^2+1^2}}\Rightarrow |c|=5\cdot\sqrt{2}\Rightarrow c\pm 5\cdot\sqrt{2}$$

odchylku určíme nejpohodlněji ze směrnicového tvaru $y=-x\pm 5\cdot\sqrt{2}$, kde $k=\operatorname{tg}\varphi=-1\Rightarrow\varphi=45°$

9. Průsečíkem dvou přímek o rovnicích $3\cdot x+y+10=0$ a $4\cdot x+5\cdot y+6=0$ veďte přímku, jejíž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je 4.

Nejdříve ze soustavy dvou rovnic určíme průsečík: z první rovnice vyjádříme $y=-3\cdot x-10$ a dosadíme do druhé rovnice $4\cdot x-15\cdot x-44=0\Rightarrow x=-4\wedge y=2$

známe bod, kterým bude přímka procházet, známe její vzdálenost od počátku soustavy souřadnic, neznáme, pro obecný tvar, souřadnice normálového vektoru a tedy koeficienty *a*, *b*. Sepišme si to:

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0$$
$$4=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

jako v některém z předešlých příkladů, můžeme jednu souřadnici (a tedy koeficient, například *a*) zvolit 1 a do první rovnice dosadit souřadnice bodu (spočítaného průsečíku), který známe a který na přímce leží. Dostaneme:

$$|c|=4\cdot\sqrt{1+b^2}\wedge -4+2\cdot b+c=0$$
$$c^2=16+16\cdot b^2$$
$$c=4-2\cdot b$$
$$16-16\cdot b+4\cdot b^2=16+16\cdot b^2$$
$$12\cdot b^2+16\cdot b=0\Rightarrow b_1=0\wedge b_2=-\frac{4}{3}\Rightarrow c_1=4\wedge c_2=\frac{20}{3}$$

$$x+4=0\wedge x-\frac{4}{3}\cdot y+\frac{20}{3}=0\Rightarrow 3\cdot x-4\cdot y+20=0$$