Funkce

Definice funkce:

*Funkce je zobrazení z množiny A reálných čísel do množiny B reálných čísel a to takové, že každému prvku z množiny A je přiřazen **právě jeden** prvek z množiny B.*
Toto zobrazení můžeme zapisovat různě:

Pravidlo	Symbolické zápisy		Množina dvojic
Přičti číslo 4	x → x + 4	y = x + 4	[x; x + 4]
Vynásob číslo 2	x → 2 * x	y = 2 * x	[x; 2 * x]
Urči číslo převrácené	x → 1 / x	y = 1 / x	[x; 1/x]

Zápisu y = f(x) říkáme **funkční předpis**.
Proměnná x je nezávisle proměnná z množiny A, množině A říkáme **definiční obor funkce** (a značíme **Df**).
Proměnná y je závisle proměnná z množiny B (její hodnota závisí na konkrétním čísle x), množině B říkáme **obor hodnot funkce** (a značíme **Hf**).

Grafické znázornění funkce

Kromě předpisu se dá funkce znázornit **tabulkou**, kde jeden řádek představuje libovolné hodnoty z definičního oboru a druhý řádek vypočítané hodnoty podle funkčního předpisu. Stejně tak se dá funkce znázornit **množinou uspořádaných dvojic** (první je x-ová hodnota, druhá y-ová hodnota).

Kartézská soustava souřadnic

Abychom se dorozuměli, používáme takovou soustavu souřadnic, která splňuje několik kritérií:

1. přímky, kterým říkáme **osy**, jsou na sebe kolmé – *vodorovnou* označujeme *x*, *svislou y*;protínají se v **počátku soustavy souřadnic**, ten označujeme O
2. mají stejné měřítko, jednotky stejné délky
3. počátkem je každá osa rozdělena na dvě polopřímky, jedním směrem (doprava nebo nahoru) kladnou, počínaje nulou, druhým směrem (doleva nebo dolů) zápornou, počínaje nulou

Vynesení konkrétního bodu odpovídajícího funkci znamená najít jeho obraz na ose x, jeho obraz na ose y a průsečík rovnoběžek s těmito osami procházejícími těmito obrazy.

Průsečíky grafu funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body. Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0].Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y].
A nyní se na některé funkce podíváme podrobněji.

Vlastnosti funkcí

Monotónnost průběhu funkcí

Funkce je **rostoucí**, pokud s rostoucím x roste i y.
$\forall x \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Funkce je **klesající**, pokud s rostoucím x roste i y.
$\forall x \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Funkce je **nerostoucí**, pokud s rostoucím x roste i y.
$\forall x \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Funkce je **neklesající**, pokud s rostoucím x roste i y.
$\forall x \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Extrémy funkce

Extrémem funkce je hodnota, která je menší (nebo větší) než všechny ostatní hodnoty funkce.
Funkce má v bodě x_{min} mimimum, pokud $\forall x \in D_f : f(x) > f(x_{min})$
Funkce má v bodě x_{max} maximum, pokud $\forall x \in D_f : f(x) < f(x_{max})$

Souměrnost funkce

Funkce, která je souměrná podle osy y, se nazývá sudá funkce.
$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$
Funkce, která je souměrná podle počátku soustavy souřadnic, se nazývá lichá funkce.
$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = -f(-x)$

Funkce, funkční hodnoty

Podle grafu

Funkci poznáme podle toho, že se nikde nestane, že by jednomu x odpovídaly dvě (a více) hodnoty y. Graf funkce je množina bodů, které mají x-ové souřadnice, y-ové souřadnice. Tyto souřadnice odpovídají dvojicím čísel, které souhlasí s výpočtem pomocí předpisu funkce. Dosadím-li za x, dostanu funkční hodnotu f(x)=y. Dosadím-li za y, dostanu, pro které x vychází taková funkční hodnota.

Podle předpisu

Mám-li na straně předpisu výraz, který nenabývá jednoznačného výsledku, pak se nemůže jednat o funkci. x je nezávisle proměnná, dosazuji hodnoty z definičního oboru, y je závisle proměnná, její výsledek závisí na předpisu a dosazeném x. Množinu všech y (funkčních hodnot) nazýváme oborem hodnot.

Definiční obory a obory hodnot

Podle grafu

Definiční obor „přečteme" na ose *x* (promítnutím bodů grafu na osu *x*) a obor hodnot na ose *y* (promítnutím bodů grafu na osu *y*).

Podle předpisu

Definiční obor je vlastně množina x, pro které má předpis smysl. Obor hodnot dost často (neznáme-li vlastní funkci a její vlastnosti) nejsme schopni určit.

Monotónnost funkce, maxima a minima, omezenost

Podle grafu

Funkce rostoucí v celém definičním oboru roste, tedy pro „zvětšující se" x se zvyšuje i hodnota y (funkční hodnota). Pro neklesající funkci platí, že pro některá x vychází funkční hodnota stejná, jinak je ale rostoucí.
Funkce klesající v celém definičním oboru klesá, tedy pro „zvětšující se" x se snižuje hodnota y (funkční hodnota). Pro nerostoucí funkci platí, že pro některá x vychází funkční hodnota stejná, jinak je ale klesající.
Maxima, minima a omezenost funkce poznáváme podle osy y a funkčních hodnot funkce – má-li funkce maximum, je omezená shora, má-li minimum, je omezená zdola. A obráceně – je-li nějak omezená, pak má i maximum nebo minimum.

Podle předpisu

Znám-li vlastnosti funkce podle předpisu, mohu určit její maxima a minima (má-li je). Obecně zatím žádné „nástroje“ ke zjištění zatím neznáme. Můžeme se pokusit na konkrétním předpisu zjistit pomocí rovnic/nerovnic a jejich úprav.

Sudost, lichost

Podle grafu

Stačí rozpoznat, zda je graf souměrný podle osy y (funkce je sudá) nebo podle počátku soustavy souřadnic (funkce je lichá).

Podle předpisu

Obecně zatím žádné „nástroje“ ke zjištění zatím neznáme. Můžeme se pokusit na konkrétním předpisu zjistit pomocí rovnic/nerovnic a jejich úprav.

Konstantní funkce

$y=k$, kde k je libovolné reálné číslo
Definičním oborem této funkce může být celá množina reálných čísel (nebo její libovolná podmnožina), protože ať zvolím x jakékoliv, předpis přiřadí y jedno konkrétní reálné číslo k, které je samo oborem hodnot této funkce.
Grafem je přímka, rovnoběžná s osou x, kde y = k (podle funkčního předpisu)

Lineární funkce

$y=a \cdot x+b$, kde a je libovolné reálné číslo kromě nuly (protože pro a=0 se jedná o konstatní funkci) a b je libovolné reálné číslo
Definičním oborem této funkce může být celá množina reálných čísel (nebo její libovolná podmnožina), protože v předpisu mohu zvolit za x jakékoliv číslo a předpis přiřadí y jeho a-násobek zvětšený o číslo b. Oborem hodnot je množina reálných čísel (nebo její podmnožina v závislosti na definičním oboru).

Vlastnosti lineárních funkcí

Vlastnosti lineárních funkcí, vliv parametrů a a b v předpisu $y=a \cdot x+b$ se dá nejlépe vyzkoušet na následujícím příkladu:
Parametr b má vliv na posun funkce na ose y, jeho hodnota přímo udává průsečík grafu funkce s osou y.
Parametr a má vliv na sklon grafu funkce, pro kladné a je y (funkční hodnota) se zvyšujícím se (rostoucím) x také zvyšující se (rostoucí) a pro záporné a je y se zvyšujícím se x zmenšující se (klesající).
Závěr:
Pro kladné a říkáme, že funkce je **rostoucí**, a **pro záporné a** říkáme, že funkce je **klesající**.

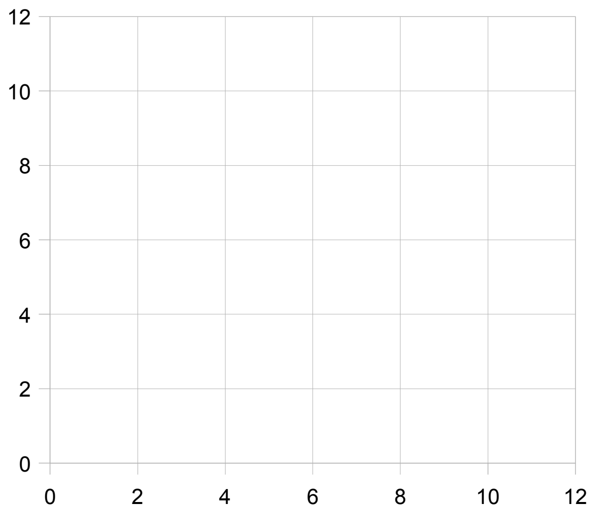
Průsečíky grafu lineární funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body. Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0], v předpisu y = a * x + b bude y = 0, tedy 0 = a* x + b, průsečík s osou x je X[-b/a; 0].
Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y], v předpisu y = a * x + b bude x = 0, tedy y = b, průsečík s osou y je Y[0; b].

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je funkce daná předpisem $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.
Jejím definičním oborem je $\mathbb{R}$, protože za nezávisle proměnnou x mohu dosadit jakékoliv reálné číslo.
Její obor hodnot je omezený, protože umocněním x nedostaneme jakékoliv reálné číslo, ale pouze reálné číslo nezáporné – k oboru hodnot se proto ještě vrátíme.
Její průsečíky s osami jsou body, kdy se $x=0$, tedy $y=c$ nebo kdy se $y=0$, tedy kořeny rovnice $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Tato rovnice ale řešení mít nemusí, proto ani průsečíky s osou x nemusí existovat.
Závěr: Průsečík s osou y $Y[0;c]$; průsečík s osou x, existuje-li, je $X_1[x_1;0];X_2[x_2;0]$.
Podívejme se na graf základní funkce $y=x^2$, případně co s ním dělají parametry a,b,c .

x	y
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

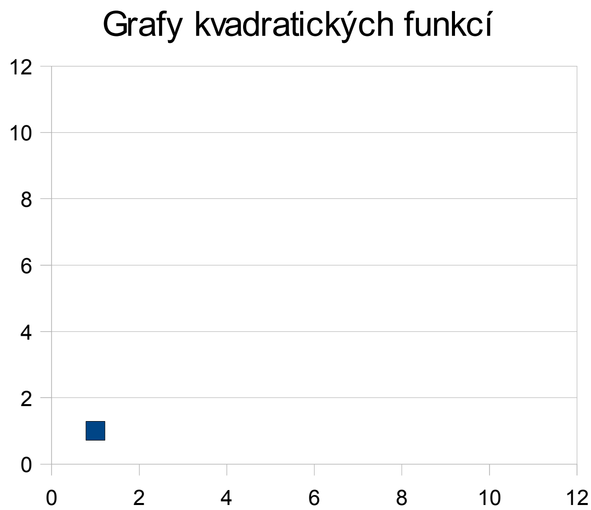


Z grafu je vidět, že funkce $y=x^2$ je pro záporné x klesající a po kladné x rostoucí, pro $x=0$ má ze všech hodnot y tu nejmenší hodnotu, tedy minimum a směrem nahoru je otevřená.

Změny grafu podle $y=p\cdot x^2$

Kdybychom všechny hodnoty $y=x^2$ vynásobili kladným číslem ($y=p\cdot x^2, p>0$), zvětší se hodnoty p-krát. Kdybychom všechny hodnoty $y=x^2$ vynásobili záporným číslem ($y=p\cdot x^2, p<0$), zvětší se hodnoty p-krát, ale na opačnou stranu osy y.

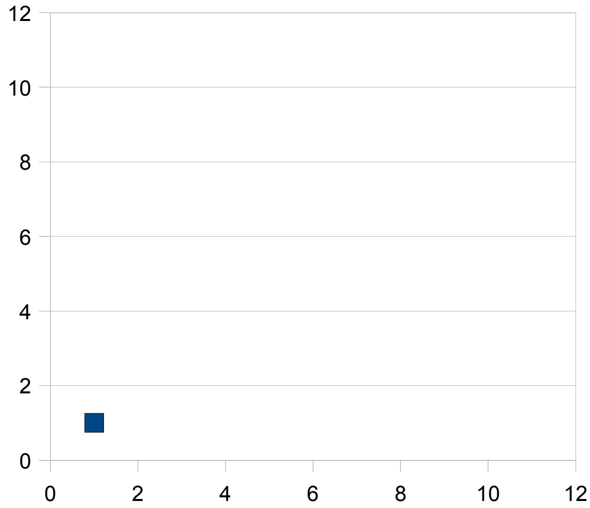
x	$y=x^2$	$y=2\cdot x^2$	$y=-2\cdot x^2$
-3	9	18	-18
-2	4	8	-8
-1	1	2	-2
0	0	0	0
1	1	2	-2
2	4	8	-8
3	9	18	-18



Změny grafu podle $y=x^2+p$

To by sice mělo být jednoduché, číslo p posouvá graf funkce nahoru nebo dolů (kladné p nahoru, záporné p dolů), ale raději si to zase ukážeme na tabulce a grafu. Prakticky jde o to, že každou hodnotu zvýšíme/snížíme o p: $y=f(x)$ změníme na $y=f(x)+p$

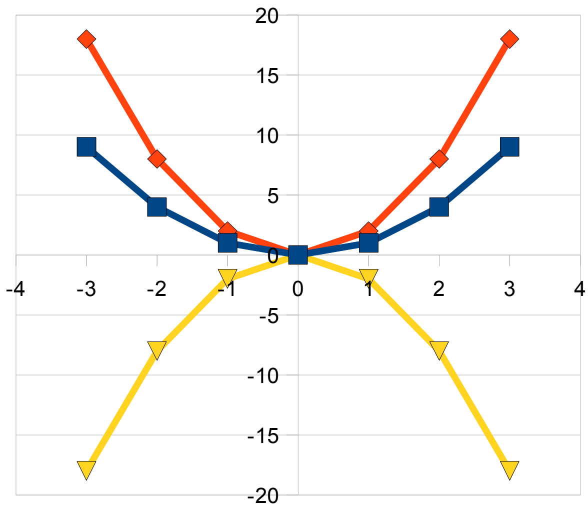
x	$y=x^2$	$y=x^2+4$	$y=x^2-3$
-3	9	13	6
-2	4	8	1
-1	1	6	-2
0	0	4	-3
1	1	6	-2
2	4	8	1
3	9	13	6



Změny grafu podle $y=(x-p)^2$

To už je trochu těžší. Každou hodnotu změníme: $y=f(x)$ na $y=f(x-p)$. Znamená to, že se hodnoty y pro x budou shodovat s hodnotami pro x odpovídající $x-p$. Zase si spočítáme tabulku a načrtneme graf.

x	$y=x^2$	$y=(x-3)^2$	$y=(x+2)^2$
-3	9	36	1
-2	4	25	0
-1	1	16	1
0	0	9	4
1	1	4	9
2	4	1	16
3	9	0	25



Z grafů je patrné, že se výchozí graf funkce $y=x^2$ posunul o p doprava (když je p kladné a odečítáme) a o p doleva (když je p kladné a přičítíme nebo, což je totéž, když je p záporné a odečítáme).
Tento posun říká také, kam se posune minimum nebo maximum dané funkce.

Shrnutí

Grafem kvadratické funkce $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je křivka, které říkáme **parabola**. Je-li $a>0$, má **minimum** (je otevřená směrem nahoru), je-li $a<0$, má **maximum** (je otevřená směrem dolů).
Extrém (minimum/maximum) zjistíme úpravou předpisu do tvaru $y=(x-m)^2+n$.

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

$$y=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x)+c$$

$$y=a\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2\cdot a}+\frac{b^2}{4\cdot a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4\cdot a}$$

$$y=a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$$

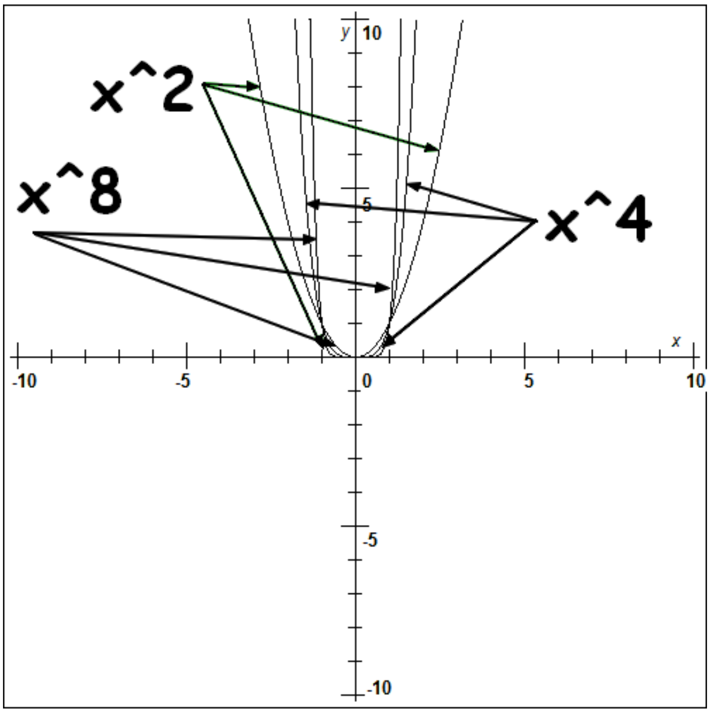
Hodnoty $m=-\frac{b}{2\cdot a}$ a $n=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$ jsou souřadnice extrému – $\left[-\frac{b}{2\cdot a};\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right]$.

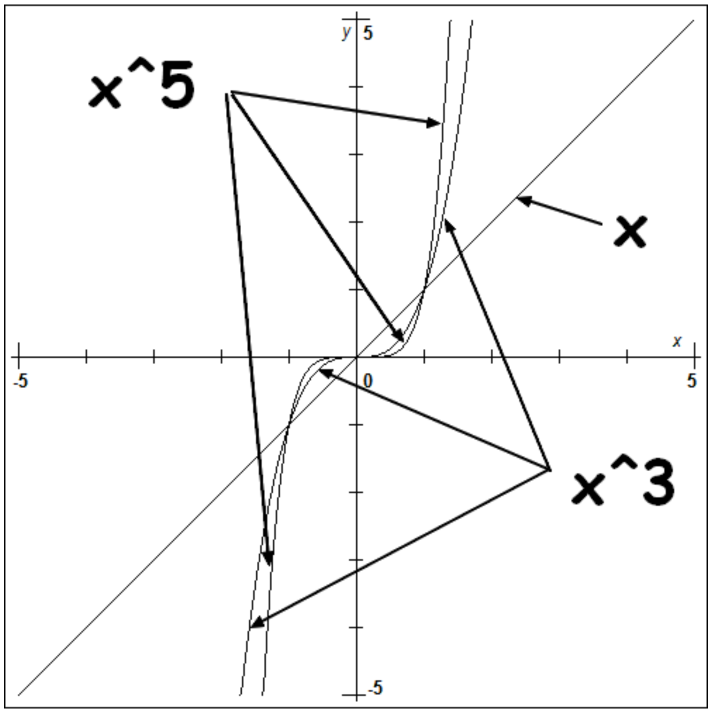
Pokud je $a>0$, je obor hodnot $\left\langle\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a};\infty\right)$, pokud je $a<0$, je obor hodnot $\left(-\infty;\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right\rangle$

Funkce je pro $a>0$ klesající do extrému, od extrému rostoucí, pro $a<0$ je rostoucí do extrému, od extrému klesající.

Mocninné funkce

Všechny funkce tvaru $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, nazýváme mocninné funkce.
všechny mají $D_f = \mathbb{R}$.
Je-li n sudé číslo, jsou funkce sudé, mají $H_f = \langle 0; \infty)$. Jsou pro $x \in (-\infty; 0\rangle$ klesající, pro $x \in \langle 0; \infty)$.
Je-li n liché číslo, jsou funkce liché, mají $H_f = \mathbb{R}$. Jsou v celém definičním oboru rostoucí.





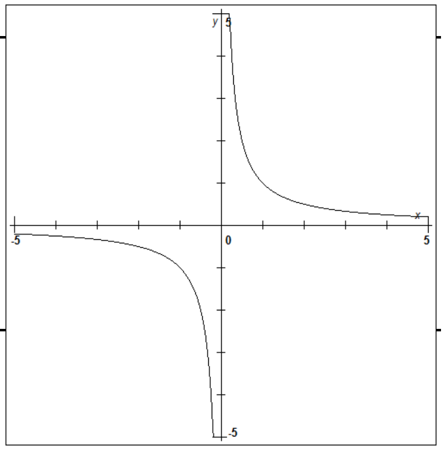
A co se bude dít, když se funkce změní na $y = a \cdot x^n + b$?
Parametr $a > 0$ znamená rostoucí funkci (liché n) nebo vrchol dole (sudé n),
pro $a > 1$ bude graf užší, pro $0 < a < 1$ bude graf širší.
Parametr $a < 0$ znamená klesající funkci (liché n) nebo vrchol nahoře (sudé n),
pro $a < -1$ bude graf užší, pro $0 > a > -1$ bude graf širší.

Nepřímá úměrnost

Funkce s předpisem $y=\frac{1}{x}$ má $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pro x=0 hodnota není definována, budou-li x kladná, blízká nule, funkční hodnota roste, pro x záporná, blízká nule, funkční hodnota klesá.
Z tabulky můžeme odhadnout graf:

x	-4	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	-4	-8	-	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Graf se nazývá hyperbola. Skládá se ze dvou větví, obě klesají.
Obor hodnot je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, hodnoty y=0 není možné dosáhnout. Průsečíky tím pádem tato funkce nemá.



Jak bude vypadat funkce $y=\frac{k}{x}$?

Pro $k>0$ větve budou ve stejných částech soustavy souřadnic (první a třetí kvadrant), pro $k<0$ se větve (protože předchozí hodnoty budou mít opačné znamínko) prohodí do druhého a čtvrtého kvadrantu.
Pro $k>1$ nebo $k<-1$ se větve „oddálí“ od os, pro $-1<0<1$ se větve „přiblíží“ k osám.

Jak bude vypadat funkce $y=\frac{1}{x}+q$?

Celý graf se posune o q, je-li $q>0$, pak se posune nahoru, je-li $q<0$, posune se dolů, obor hodnot bude $\mathbb{R}\setminus\{q\}$.

Jak bude vypadat funkce $y=\frac{1}{x-p}$?

Bude mít $D_f=\mathbb{R}\setminus\{p\}$. To znamená, že je-li $p>0$, posouvá se původní graf doprava, je-li $p<0$, posouvá se graf doleva.

A jak obecně funkce $y=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$?

Takovou funkci musíme (a umíme) převést na tvar $y=\frac{k}{x-p}+q$, což znamená obecně rozložit čitatel na násobek jmenovatele a číselný zbytek.

$$\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}=\frac{\frac{a}{c}\cdot(c\cdot x+d)}{c\cdot x+d}+\frac{b-\frac{a\cdot d}{c}}{c\cdot x+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{a\cdot d}{c}}{c\cdot x+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{b}{c}-\frac{a\cdot d}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

, což znamená, že univerzálně $k=\frac{b}{c}-\frac{a\cdot d}{c^2}$, $p=\frac{-d}{c}$, $q=\frac{a}{c}$

Konkrétně:

Příklad 1:

$$y=\frac{x+4}{x-3}$$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\} \quad ; \quad Y\left[0;-\frac{4}{3}\right] \quad ; \quad X[-4;0]$$

$$y=\frac{x+4}{x-3}=\frac{x-3+4+3}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}+\frac{7}{x-3}=1+\frac{7}{x-3}$$

Je to funkce $y=\frac{7}{x}$ posunutá o 1 nahoru a 3 doprava. Je klesající pro $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$

Exponenciální funkce

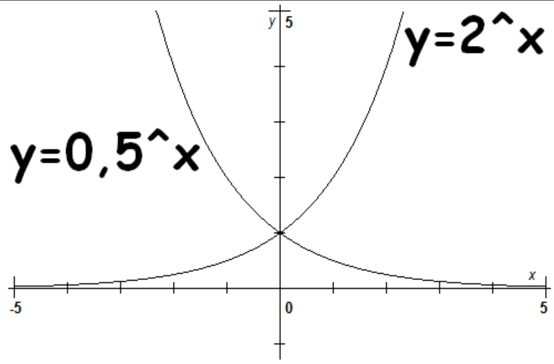
Mocninné funkce $y=x^n$ měly nezávisle proměnnou v základu mocniny, za n jsme dosazovali přirozená čísla (a -1).
Tentokrát bude základ „pevný“, reálné číslo a exponentem bude nezávisle proměnná.
Exponenciální funkce: $y=a^x$, kde $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.
Kdyby a bylo číslo záporné, funkce by byla „divná“ - pro sudá x kladná, pro záporná x záporná, zkrátka by „skákala“.
Kladná mocnina umocněná na 0 se rovná 1, takže všechny funkce budou procházet bodem [0; 1]. Pro další seznámení si budeme muset nakreslit nějaký konkrétní graf.
Zvolme $y=2^x$:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	16

Zvolme $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	16	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Grafy funkce vyneseme do jedné soustavy souřadnic. Pro základ $a=2$ je funkce rostoucí, pro základ $\frac{1}{2}$ je funkce klesající. Pro $a=2$ je pro kladná x funkční hodnota větší než 1 a pro záporná x menší než 1; u funkce se základem a= $\frac{1}{2}$.
To se dá zobecnit a platí:



Vlastnosti exponenciálních funkcí

$a>1$: funkce je rostoucí;

$\forall\, x<0: 0<f(x)<1$
$x=0: f(x)=1$
$\forall\, x>0: f(x)>1$

Poznámka: všechny hodnoty jsou kladné, funkce je omezená zdola hodnotou 0; $D_f=\mathbb{R}$; $H_f=(0;\infty)$

$0<a<1$: funkce je klesající;

$\forall\, x<0: f(x)>1$
$x=0: f(x)=1$
$\forall\, x>0: 0<f(x)<1$

Poznámka: všechny hodnoty jsou kladné, funkce je omezená zdola hodnotou 0; $D_f=\mathbb{R}$; $H_f=(0;\infty)$

Prostá funkce

Pro funkci platí, že pro všechna x z definičního oboru existuje právě jedno y z oboru hodnot, každému x je přiřazeno právě jedno y.
Kdybychom v předpisu prohodili x a y, dostaneme jiný předpis. U něj ale toto pravidlo všeobecně neplatí.
Prostá funkce je taková, že každé y z oboru hodnot odpovídá právě jednomu x z definičního oboru.
Funkce f je prostá, jestliže $\forall x \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
Zároveň platí, je-li funkce rostoucí nebo klesající, pak je i prostá (obráceně to neplatí).

Příklad:

Rozhodněte u následujících funkcí, zda jsou prosté:

a) $y=5\cdot x-7$ b) $y=-2\cdot x^2+6\cdot x-9$ c) $y=x-|x+1|$

d) $y=x^3$ e) $y=\dfrac{2}{x-3}+4$ f) $y=3^x$

Řešení:

a) grafem je přímka, každé y odpovídá právě jednomu x, funkce je prostá
b) grafem je parabola, kromě vrcholu $\left[\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right]$ všechna ostatní $y\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)$ odpovídají dvěma různým hodnotám x, funkce není prostá
c) grafem funkce jsou polopřímky: $x\in(-\infty;-1\rangle : y=2\cdot x+1$; $x\in\langle-1;\infty\rangle : y=-1$, už samotná druhá přímka (rovnoběžná s osou x) říká, že pro různá x dostaneme stejné y, funkce není prostá
d) funkce je rostoucí a lichá, z grafu víme, že různá y odpovídají vždy jednomu x, funkce je prostá
f) grafem je exponenciála, každé y odpovídá právě jednomu x, funkce je prostá

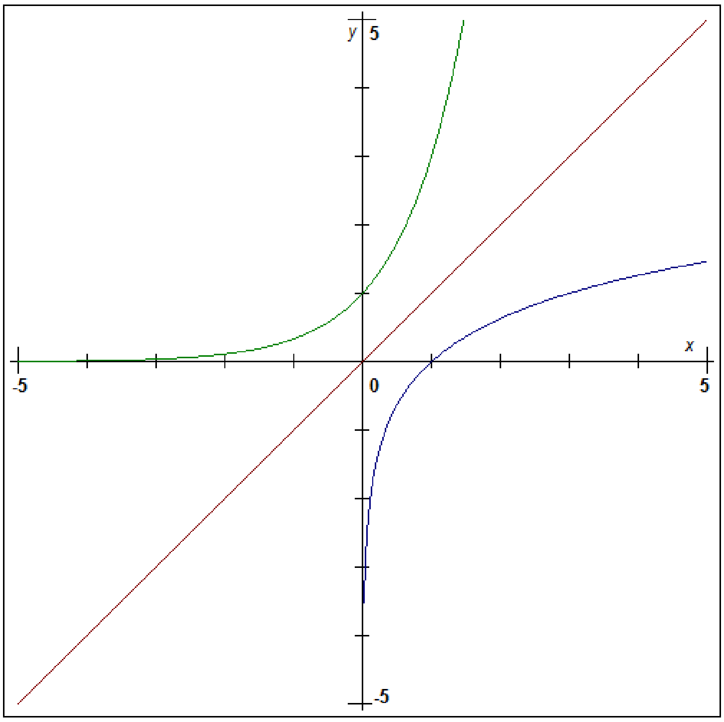
Inverzní funkce

Podle osy 1. a 4. kvadrantu (grafu funkce $y=x$) je soustava souřadnic souměrná sama se sebou, osa x přejde na osu y a obráceně. Všechny dvojice funkcí, které jsou takto souměrné, nazýváme inverzní funkce.
Protože dochází k „prohození“ hodnot x a y, mají tyto funkce „prohozený“ předpis – předpis jedné získáme z druhé tak, že upravíme předpis tak, že vyjádříme x pomocí y a získáme (záměnou x za y) tak předpis druhé funkce.
Funkce inverzní k prosté funkci f je f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D(f^{-1})=H(f)$
2. Každému $y\in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x\in D_f$, pro které platí $y=f(x)$.

Příklad 3:

Funkce $f: y=3^x$ má $D(f)=\mathbb{R}$; $H(f)=(0;\infty)$.
Funkce k ní inverzní bude mít $D(f)=(0;\infty)$;
$H(f)=\mathbb{R}$.



Funkce logaritmus

Mějme a kladné reálné číslo, různé od nuly a funkci f exponenciální funkci o základu a ($f: y=a^x$). Pak logaritmická funkce o základu a je taková funkce g , pro kterou platí:

pro všechna reálná čísla c , d je $g(d)=c$ právě tehdy, když $f(c)=d$.

Funkci g(x) zapisujeme $g: y=\log_a x$, čteme funkce g: y = logaritmus x o základu a.

Jednodušeji:

Funkce $y=\log_a x$ (čteme: logaritmus x o základu a) je inverzní funkcí k funkci $y=a^x$. Platí podmínky, že $a \in \mathbb{R}^+; a \neq 1$.

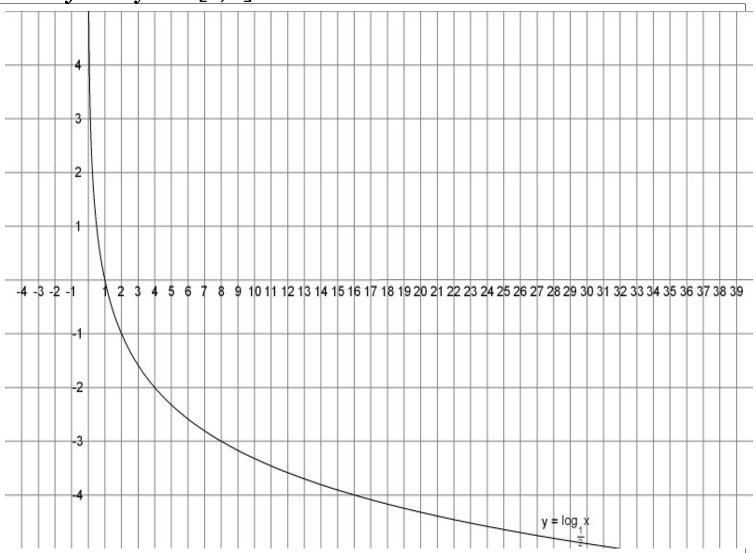
funkce	definiční obor	obor hodnot	průsečík
$y=a^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$[0;1]$
$y=\log_a x$ $\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$[1;0]$	

Logaritmus kladného reálného čísla x o základu a se rovná reálnému číslu y právě tehdy, když a umocněné na y se rovná x . <==> $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x$

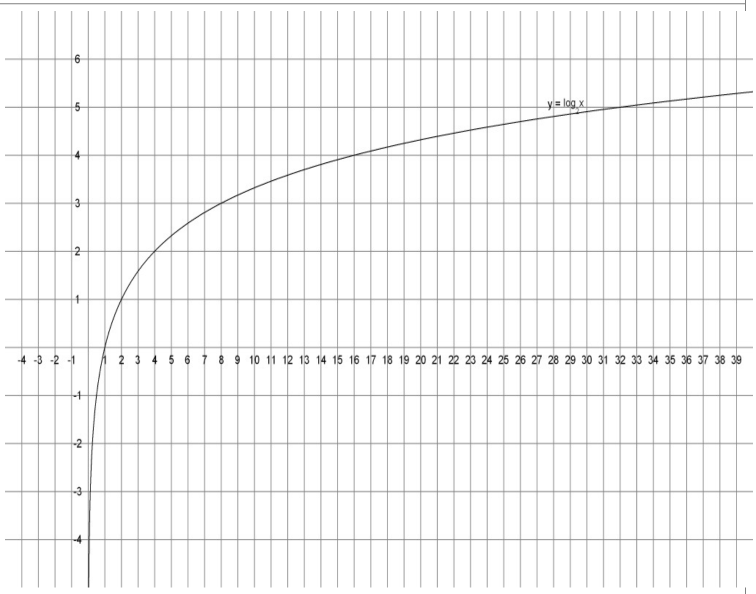
Vlastnosti funkce logaritmus

f(x): y = $\log_a x$; a>0, a≠1; $D_f=\mathbf{R}^+$; $H_f=\mathbf{R}$; průsečík s osou x je vždy 1 $P_x[1;0]$

pro 0<a<1
- funkce je klesající v celém definičním oboru
- pro 0<x<1 jsou funkční hodnoty kladné;
- pro x>1 jsou funkční hodnoty záporné



pro a>1
- funkce je rostoucí v celém definičním oboru
- pro 0<x<1 jsou funkční hodnoty záporné;
- pro x>1 jsou funkční hodnoty kladné



Příklady:

a) určení definičního oboru:

$\log_2 \frac{x+2}{x-4}$; $\frac{x+2}{x-4} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$

$\log_2 \sqrt{-3\cdot x^2 + 3\cdot x + 18}$; $-3\cdot x^2 + 3\cdot x + 18 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 3)$

b) určení souřadnic

z grafu, z počítání log u příkladu $\log_{\frac{1}{2}} x$: $x=8 \Rightarrow y=-3$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2$; $y=2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$; $y=3 \Rightarrow y=\frac{1}{8}$

z grafu, z počítání log u příkladu $\log_2 x$: $x=8 \Rightarrow y=3$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-2$; $y=2 \Rightarrow x=1$; $y=3 \Rightarrow y=8$

c) určení vlastností x

$\log_7 x < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$; pro základ 7 je funkce rostoucí; dále viz obrázek a vlastnosti nahoře

$\log_{2,3} x > 0 \Leftrightarrow x \in (1; \infty)$

$\log_{\frac{2}{5}} x < 0 \Leftrightarrow x \in (1; \infty)$

$\log_{\frac{1}{15}} x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$

$\log_9 x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1\rangle$

$\log_{\frac{12}{76}} x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1\rangle$

$\log_{\frac{1}{5}} x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty)$

$\log_{15} x > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1; \infty)$

z wikipedie:

Desítkový logaritmus

U logaritmu o základu 10 (nazývaného desítkový či dekadický logaritmus, příp. Briggsův podle Henryho Briggse) se ve značení vynechává základ a píše se jen prostě log x, někdy se používá také speciální značení lg x.

Přirozený logaritmus

Logaritmus o základu e se označuje jako přirozený logaritmus (někdy také Napierův podle Johna Napiera) a značí se ln x (logaritmus naturalis, latinsky přirozený logaritmus). Je odvozen od exponenciální funkce s přirozeným exponentem, což je funkce, která pro $x=0$ má tečnu $y=x+1$. Číslo $e \approx 2{,}718282$

Binární logaritmus

Hlavně v informatice se objevuje logaritmus o základu dva (binární logaritmus), který je v příslušném kontextu někdy značen lg x, případně ld x.