

MAT-2003

Úloha 4

Posloupnost je zadána pro všechna přirozená čísla n rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n - 4$, kde $a_1 = 50$.

Pro jaké nejmenší přirozené číslo n bude součet prvních n členů záporný?
max. 4b

Úloha 8

V rámci úsporných opatření rozhodlo vedení podniku, že na konci každého čtvrtletí klesne počet zaměstnanců podniku o 7 % oproti stavu na počátku čtvrtletí.

O kolik procent klesne počet zaměstnanců od začátku roku k počátku ledna roku následujícího?

A) 22

B) 25

C) 27

D) 30

max 4b

MAT-Z-2009

Úloha 6

max. 2 b.

V geometrické posloupnosti je dán kvocient $q = \frac{3}{2}$ a člen $a_{54} = 54$.

Určete hodnoty členů a_{55} a a_{51} .

Úloha 14

3 b.

V soutěži byly za prvních 6 míst vyplaceny odměny v celkové hodnotě 2 400,- Kč. Nejvyšší odměna byla za první místo, za další umístění se odměny postupně snižovaly, vždy o stejnou částku.

Které tvrzení je pravdivé?

A) Součet částek pouze za 1. a 6. místo je roven 800,- Kč.

B) Součet částek pouze za 1. a 6. místo je roven 1 200,- Kč.

C) Součet částek pouze za 1. a 6. místo je větší než 1 200,- Kč.

D) Součet částek pouze za 1. a 6. místo nelze jednoznačně určit.

MAT-V-2009

Desátý člen aritmetické posloupnosti je nulový ($a_{10} = 0$). Určete podíl p nenulových členů

$$a_{20} \text{ a } a_{30} : p = \frac{a_{20}}{a_{30}}$$

Slečna Hermína disponuje částkou 8 500 korun, proto se rozhodla navštívit velký svět financí.

Zaujal ji plakát firmy „MOULA&spol.“, v němž stálo:

Naše firma zhodnotí Vaše peníze! Za 100 dnů si splníte své sny!

Za jednorázovou investici v hodnotě 10 000 korun a více garantujeme 6% zisk za 100 dnů.

Dokonce i investice pod 10 000 korun Vám přinese za 100 dnů 3% zisk.

Chybí Vám peníze? Půjčíme Vám až 10 000 korun na 100 dnů!

Teprve až uplyne celých 100 dnů, zaplatíte 15% úrok z půjčené částky.

Hermína by ráda investovala 10 000 korun, a proto zvažovala možnost půjčky. Zodpovězte následující otázky za předpokladu, že firma dostojí svým slibům.

13.1 Jaký bude zisk Hermíny, pokud si žádné peníze nepůjčí a investuje jen částku 8 500 korun?

13.2 O kolik korun se zvýší její zisk, pokud si chybějící peníze od firmy půjčí a investuje 10 000 korun?

13.3 Pokud by měla Hermína o něco méně než 8 500 korun, investice s půjčkou by se jí mohla stále ještě vyplatit. Naopak pro nízké částky je výhodnější investice bez půjčky. Pro jakou částku přinášejí obě možnosti (investice částky s půjčkou i bez půjčky) stejný zisk?

MAT-Z-2010

Úloha 20

max. 3 body

Posloupnost tvoří sedmnáct po sobě jdoucích přirozených lichých čísel seřazených vzestupně od nejmenšího k největšímu. Prostřední člen a_9 je číslo 23.

O každém z následujících tvrzení rozhodněte, je-li pravdivé (Ano), nebo nepravdivé (Ne).

1. Rozdíl mezi dvěma sousedními členy je 1.
2. $a_{12} = 29$
3. Všechny členy jsou větší než 5.
4. Součet čtyř nejmenších členů je 40.

MAT-V-2010

Úloha 3 max. 2 body

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena vzorcem $a_n = \frac{300n}{n^2 + 1}$

1. Kolik členů posloupnosti je větších než $\frac{3}{5}$?
2. Vypočtete limitu a_n pro $n \rightarrow +\infty$

Úloha 15 2 body

Určete součet nekonečné geometrické řady $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, kde pro všechna přirozená čísla

n platí: $a_n = \frac{4^{n-1}}{2^{3n}}$

- A) součet neexistuje
- B) $s = \frac{3}{4}$
- C) $s = \frac{3}{16}$
- D) $s = \frac{1}{4}$
- E) jiná reálná hodnota

Úloha 19 2 body

Martin si půjčil částku 42 000 korun. Na konci každého úrokovacího období splatil 6 000 korun. Po pěti splátkách se dlužná částka snížila na 20 000 korun. Kolik procent z dosud zaplacených peněz šlo na platbu úroků?

- A) téměř 24 %
- B) téměř 27 %
- C) 30 %
- D) asi 33 %
- E) jiný počet

MAT-Z-2011

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14 2 body

Zdeněk si potřebuje půjčit částku 15 000 Kč. Dohodne se s věřitelem, že mu dluh splatí během roku v pěti pravidelných splátkách po 3 000 Kč. Ke každé splátce má navíc připlatit 5 % aktuálního dluhu. (Tedy při první splátce je to 5 % z 15 000 Kč, při poslední už jen 5 % ze 3 000 Kč.)

Kolik korun celkem připlatí Zdeněk k dlužné částce?

- A) 2070 Kč
- B) 2250 Kč
- C) 2750 Kč
- D) 3750 Kč
- E) jinou částku

22

Čtveřice a_1, a_2, a_3, a_4 , kde $a_2 = -20$, $a_3 = 10$, představuje čtyři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, čtveřice g_1, g_2, g_3, g_4 , kde $g_2 = -10, g_3 = 20$, čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Přiřaďte uvedeným členům (22.1–22.4) odpovídající hodnoty (A–F):

22.1 a_1 _____

22.2 a_4 _____

22.3 g_1 _____

22.4 g_4 _____

- A) -50
- B) -40
- C) -10
- D) 5
- E) 40
- F) 50

MZ-A-Z-2011

Eva má hotovost 450 000 Kč a peněžní ústav jí nabízí roční termínový vklad s 3% roční úrokovou mírou. Před vyzvednutím částky se z úroku odpočítá státem stanovená daň ve výši 15 %.

Kolik korun bude z tohoto ročního termínovaného vkladu odvedeno na daních?

- A) 13 500 korun
- B) 2 250 korun
- C) 2 025 korun
- D) 1 000 korun
- E) jiná suma

Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů, z nichž první tři jsou -140; -132; -124 a poslední tři 236; 244; 252.

1) Vypočítejte dvacátý člen posloupnosti.

2) Vypočítejte součet všech 50 členů posloupnosti:

$$-140 + (-132) + (-124) + \dots + 236 + 244 + 252 =$$

3) Určete kolikátým členem posloupnosti je číslo 100.

V Kocourkově se příjmy obyvatel každým rokem zvýší o 50 % oproti příjmům z předchozího roku. Během každého dvouletého období však peníze ztratí polovinu své hodnoty.

Jak se změní hodnota příjmů po uplynutí 10 let?

- A) Zvýší se více než o 200 %.
- B) Zvýší se přibližně o 80 %.
- C) Nezmění se.
- D) Sníží se přibližně o 69 %.
- E) Sníží se přibližně o 94 %.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK A TEXT K ÚLOHÁM 13 A 14

Na výstavišti se konal veletrh květin. V prostorách výstaviště byla vysázena květinová „lomená spirála“, jejíž část je znázorněna na plánku. Je složena z 10 rovných úseků. V prvním úseku uprostřed plochy jsou umístěny 4 květiny, každý následující úsek má o další 3 květiny více než předchozí (do rohů se květiny nedávají).

(CERMAT)

1 bod

13 Vypočtete počet květin umístěných v šestém úseku.

max. 2 body

14 Kolik květin je v celé spirále?

V aritmetické posloupnosti je $a_9 - a_8 = 20$, dále je $a_{10} = 100$.
Rozhodně o každém následujícím tvrzení, zda je pravdivé či nikoli:

- A) $a_{10} - a_9 = 30$
- B) $a_8 - a_7 = 10$
- C) diference $d = 20$
- D) $a_5 = 0$

MZ-V-2011

Požizovací cena přístroje je 200 000 Kč. Po uplynutí každého roku se hodnota přístroje snižuje o čtvrtinu hodnoty z předcházejícího roku. Klesne-li hodnota pod 30 % pořizovací ceny, je možné vyměnit přístroj na konci roku za nový. (CERMAT)

2 body

Po kolika letech je možné přístroj vyměnit za nový?

- A) po 3 letech
- B) po 4 letech
- C) po 5 letech
- D) po 6 letech
- E) po 7 letech nebo později

MZ-V-jaro-2011

Nekonečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in \mathbb{N}$, je určena prvním členem $a_1 = 0$ a rekurentním vztahem: $a_{n+1} = q \cdot a_n + 4$

A) Vyjádřete další tři členy a_2 , a_3 a a_4 v závislosti na veličinách a_1 , q a výrazy upravte tak, aby neobsahovaly závorky.

B) Určete všechny reálné hodnoty q , pro něž je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

C) Pro $q = -\frac{1}{2}$ vypočtete $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 22

Zhodnocení vkladů, které nabízí peněžní instituce, je závislé na výši vložené částky. Možnosti jsou uvedeny v tabulce.

TERMÍNOVANÝ VKLAD NA 1 ROK			
Vklad	do 99 999 Kč	100 000 – 999 999 Kč	1 000 000 Kč a více
Úroková míra na jeden rok	1,9 %	2,2 %	3,2 %

Odpočítává se 15% daň z úroku.

(CERMAT)

2 body

- 22 Manželé Kvapilovi chtějí své dědictví ve výši 1,8 miliónu korun nejprve zhodnotit v peněžní instituci a po roce je rozdělit stejným dílem mezi své dvě děti.

Kolik korun by prodělali, pokud by dědictví nejprve rozdělili a obě částky uložili v peněžní instituci zvlášť?

- A) 38 060 korun
- B) 32 130 korun
- C) 15 300 korun
- D) 9360 korun
- E) jinou částku

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Spotřebitel si vzal úvěr v hodnotě U korun a splatí jej dvěma stejně vysokými splátkami po uplynutí třetího a čtvrtého roku. Dlužná částka se úročí 4,9 % po uplynutí každého roku.

Výši splátky s vyjadřuje vztah $(1,049^3 U - s)1,049 - s = 0$.

(CERMAT)

max. 3 body

11

- 11.1 Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu s . Nezaokrouhľujte.
- 11.2 Určete, o kolik procent převýší obě splátky úvěr. (Zaokrouhľete na celá procenta.)

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

2 body

- 19 V rostoucí aritmetické posloupnosti je součet prvních dvaceti členů s lichým pořadím ($a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{39}$) o 60 menší než součet prvních dvaceti členů se sudým pořadím ($a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$).

Jaká je diference d posloupnosti?

- A) 3
- B) 5
- C) 6
- D) 10
- E) 15

max. 4 body

- 12 Nekonečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in \mathbf{N}$, je určena prvním členem $a_1 = 2$ a rekurentním vztahem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$$

- 12.1 Určete další tři členy posloupnosti.
- 12.2 Členy se periodicky opakují. Vypočtete součet prvních padesáti členů (s_{50}).
- 12.3 Jaký by musel být první člen a_1 , aby byl třetí člen nulový ($a_3 = 0$)?

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení a důležité kroky zdůvodněte.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

V první zemi mají 3% roční přírůstek obyvatel. Sousední (druhá) země má sice o pětinu obyvatel méně, ale roční přírůstek obyvatel je 4%.

(CERMAT)

2 body

- 21 **Po kolika letech dostihne v počtu obyvatel druhá země první zemi, pokud se trend s přírůstky obyvatel nezmění?**

- A) asi po 18 letech
- B) asi po 20 letech
- C) asi po 21 letech
- D) asi po 22 letech
- E) asi po 23 letech

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

Bratři Hynek a Marek získali v dědictví **každý** 1,5 milionu korun. Zvolili různé strategie pro investování této částky. Hynek si pořídil ještě 2 miliony na hypotéku s 12% roční úrokovou mírou a za všechny peníze zakoupil zboží, na kterém za rok vydělal 8,5 % (tj. po odečtení daní). Poté zaplatil půjčku s úrokem. Marek všechny peníze uložil na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 % a z úroku zaplatil 15% daň.

(CERMAT)

2 body

22 Který z bratrů vydělal více?

- A) Hynek měl oproti Markovi výdělek více než dvojnásobný.
- B) Oba výdělky byly srovnatelné.
- C) Hynek vydělal asi o polovinu méně než Marek.
- D) Hynek na rozdíl od Marka nevydělal nic.
- E) Hynek prodělal.