Posloupnosti

Podvědomě tušíme, že posloupnost čísel

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

je jiná než posloupnost čísel

10,9,8,7,6,5,4,3,2,1

a ta už úplně jiná než posloupnost čísel

10,8,4,6,1,3,7,5,9,2.

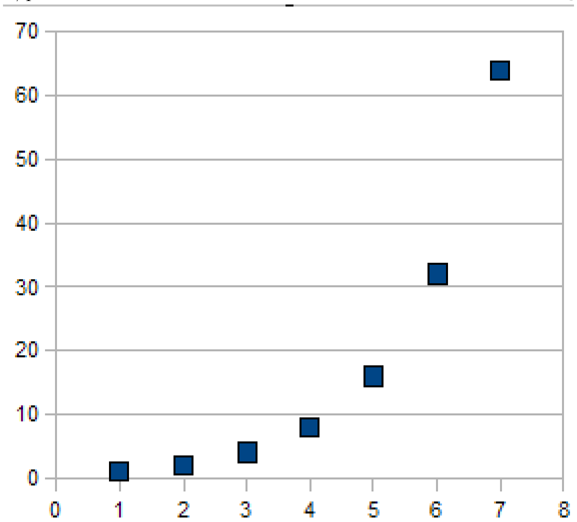
Přitom všechny posloupnosti obsahují stejná čísla. Rozdíl je v jejich pořadí. Můžeme říci, že posloupnost je množina čísel, ve které záleží na pořadí, v jakém jsou zapsány nebo jinými slovy posloupnost je zobrazení přirozených čísel do množiny reálných čísel. Každému přirozenému číslu (z určitého rozsahu, je-li posloupnost omezená, nebo skutečně pro všechna přirozená čísla, je-li neomezená) je přiřazeno nějaké reálné číslo.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & 10 = a_1 \\ 2 & \longrightarrow & 9{,}5 = a_2 \\ 3 & \longrightarrow & 5{,}4 = a_3 \\ 4 & \longrightarrow & 21 = a_4 \\ 5 & \longrightarrow & 4{,}7 = a_5 \\ 6 & \longrightarrow & 3{,}5 = a_6 \\ 7 & \longrightarrow & 4{,}6 = a_7 \\ 8 & \longrightarrow & 9{,}7 = a_8 \\ 9 & \longrightarrow & 1{,}4 = a_9 \\ 10 & \longrightarrow & 3{,}5 = a_{10} \end{array}$$

V zápise $a_k = r$ je ***a*** - název posloupnosti, ***k*** – index (kolikátý člen posloupnosti to je) a ***r*** – hodnota k-tého členu. Je-li zadáno $a_n = \frac{n}{n+1}$, pak pro 1. člen je jeho hodnota $\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_7 = \frac{7}{8}$ a $a_u = \frac{u}{u+1}$ za podmínky, že ***u*** je číslo přirozené.

Zadání posloupnosti

Posloupnost může být zadána výčtem prvků $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 8; a_4 = 16; a_5 = 32; a_6 = 64; \ldots$, předpisem pro n-tý člen $\left(2^{n-1}\right)_1^{\infty}$; rekurentně $a_1 = 1; a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ nebo graficky:



Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost, ve které je rozdíl mezi dvěma sousedními členy konstantní (neměnný, stejný), tomuto rozdílu říkáme diference: $a_2 - a_1 = a_{1001} - a_{1000} = a_n - a_{n-1} = d$.
Když se budeme snažit vysledovat závislosti (vztahy, nebo – chcete-li – vzorečky), pak si můžeme

napsat:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2 \cdot d$

$a_4 = a_3 + d = a_2 + d + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3 \cdot d$

$a_5 = a_4 + d = a_3 + d + d = a_2 + d + d + d = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4 \cdot d$

$\dots$

$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2 \cdot d = \dots = a_1 + (n-1) \cdot d$

Obdobně mezi dvěma nesousedními členy platí vztahy:

$a_5 = a_2 + (5-2) \cdot d$

$a_{50} = a_{10} + (50-10) \cdot d$

$a_r = a_s + (r-s) \cdot d$

Vzorec pro součet je lehce odvoditelný, napíšeme-li si posloupnosti pod sebe v obráceném pořadí, sečteme-li je a uvědomíme si, každý sčítanec nově vzniklé posloupnosti má stejnou hodnotu a vyskytuje se právě ***n*** krát.

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots$

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + d + a_{n-1}) + (a_1 + 2 \cdot d + a_{n-2}) + \dots$

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_{n-1} + d) + (a_1 + a_{n-2} + 2 \cdot d) + \dots$

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots$

Vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti tedy je $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost je každá posloupnost, ve které je podíl dvou sousedních členů konstantní (neměnný, stejný), tomuto podílu říkáme kvocient: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{1001}}{a_{1000}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

Když se budeme snažit vysledovat závislosti (vztahy, nebo – chcete-li – vzorečky), pak si můžeme napsat:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_2 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_5 = a_4 \cdot q = a_3 \cdot q \cdot q = a_2 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^4$

$\dots$

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_{n-2} \cdot q^2 = \dots = a_1 \cdot q^{n-1}$

Obdobně mezi dvěma nesousedními členy platí vztahy:

$a_5 = a_2 \cdot q^{5-2}$

$a_{50} = a_{10} \cdot q^{50-10}$

$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Vzorec pro součet je odvoditelný (trochu obtížněji než pro aritmetickou posloupnost), napíšeme-li si posloupnosti pod sebe, druhou vynásobíme ***q*** a odečteme-li první od druhé (je-li q>0). Uvědomíme si, že druhý, třetí čtvrtý až n-1. člen se odečtou a zbude jen první člen první posloupnosti a poslední člen druhé (vynásobené) posloupnosti.

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
$q \cdot s_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \ldots + q \cdot a_{n-2} + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$

$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-3} \cdot q + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q$
$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q \ldots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + + a_n \cdot q$

$q \cdot s_n - s_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q \ldots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q - (a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-3} \cdot q + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q)$

$s_n \cdot (q-1) = a_n \cdot q - a_1$

$s_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$
$s_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot q^n - a_1$
$s_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$
$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Vzorec pro součet prvních ***n*** členů geometrické posloupnosti tedy je $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Řešení příklady

1. Dokažte, že posloupnost $(\sin n)_1^{\infty}$ je omezená.
   Funkce sin x je omezená v celém definičním oboru, její obor hodnot je $\langle -1; 1 \rangle$. Proto i posloupnost sin n bude omezená.

2. Určete posloupnost $(\log x^n)_1^{\infty}$ rekurentně a prvním členem.
   Musí platit podmínka, že x>0. Pak a_1 = log x, a_2 = log x^2, a_3 = log x^3.
   Obecně a_n = log x^n.
   Z vlastností logaritmů vyplývá, že $\log x + \log x = \log x \cdot x = \log x^2$, což je totéž jako $2 \cdot \log x = \log x^2$.
   Proto i $\log x^n = \log x^{n-1} \cdot x = \log x^{n-1} + \log x$.
   Můžeme napsat $a_n = a_{n-1} + \log x$.

3. Stanovte n-tý člen posloupnosti *1/2, 3/4, 5/8, 7/16,...* Rozhodněte, zda je posloupnost omezena zdola nebo shora; zda je rostoucí nebo klesající. Znázorněte prvních 5 členů graficky.
   $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{3}{4}; a_3 = \frac{5}{8}; a_4 = \frac{7}{16}$. Ze sledování zlomků řešení nedostaneme. Zkusíme se podívat zvlášť na čitatele a zvlášť na jmenovatele. Řada 1, 3, 5, 7 odkazuje na lichá čísla; řada 2, 4, 8, 16 na postupné mocniny čísla 2: $a_n = \frac{2 \cdot n - 1}{2^n}$. Čísla ve jmenovateli rychle rostou (geometricky, násobkem dvojky), každý nový člen posloupnosti je menší a menší, ale nikdy nebude záporný, ani nulový. Posloupnost je omezená shora prvním členem a zdola nulou, je klesající.

4. Stanovte n-tý člen posloupnosti *1/3, 4/5, 9/7, 16/9,...* Rozhodněte, zda je posloupnost omezena zdola nebo shora; zda je rostoucí nebo klesající. Znázorněte prvních 5 členů graficky.
   $a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = \frac{4}{5}; a_3 = \frac{9}{7}; a_4 = \frac{16}{9}$. Znovu se zkusíme podívat zvlášť na čitatele a zvlášť na jmenovatele. Řada 1, 4, 9, 16 je řada druhých mocnin přirozených čísel (mohla by to být i čísla záporná); řada 3, 5, 7, 9 odkazuje na lichá čísla počínaje 3: $a_n = \frac{n^2}{2 \cdot n + 1}$. Čísla v čitateli rychle rostou (jsou to mocniny), každý nový člen posloupnosti má větší a větší čitatel, proto posloupnost roste, je omezená zdola prvním členem.

5. Určete součet prvních osmi členů aritmetické posloupnosti, víte-li, že $a_4 = 17$ a $a_7 = 11$.

$a_7 = a_4 + 3 \cdot d \Rightarrow d = \frac{a_7 - a_4}{3}$, d = -2. Stále ještě neznáme a_1 ani a_n. $a_4 = a_1 + 3 \cdot d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3 \cdot d$,

$a_1 = 23$. $a_8 = a_1 + 7 \cdot d$ nebo také $a_8 = a_7 + d$, $a_8 = 9$. $s_8 = \frac{8}{2} \cdot (a_1 + a_n)$, $s_8 = 128$.

6. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno $a_3 = 4 \cdot \sqrt{3}$, $a_4 = -8 \cdot \sqrt{3}$.

   $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-8 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{3}} = -2$. $a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{(-2)^2} = \sqrt{3}$. $a_2 = a_1 \cdot q = \sqrt{3} \cdot (-2) = -2 \cdot \sqrt{3}$, $a_5 = a_4 \cdot q = 16 \cdot \sqrt{3}$.

6. V geometrické posloupnosti je dáno $a_1 + a_6 = 16$ a $a_3 + a_4 = 19$. Určete součet prvních pěti členů.

   $$\begin{aligned} a_1 + a_1 + 5 \cdot d &= 16 \\ a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 3 \cdot d &= 19 \end{aligned} , \quad \begin{aligned} 2 \cdot a_1 + 5 \cdot d &= 16 \\ 2 \cdot a_1 + 5 \cdot d &= 19 \end{aligned}$$ Tato soustava nemá řešení, tedy posloupnost neexistuje.

7. Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou první tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete je.

   $a_1 = 2 + k$, $a_2 = 7 + k = a_1 \cdot q$, $a_3 = 17 + k = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$. Po úpravě máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $\begin{aligned} 7 + k &= (2 + k) \cdot q \\ 17 + k &= (2 + k) \cdot q^2 \end{aligned}$ nebo lépe $\begin{aligned} \frac{7 + k}{2 + k} &= q \\ \frac{17 + k}{2 + k} &= q^2 \end{aligned}$ a tedy dosadíme-li z první rovnice q do druhé rovnice, dostaneme $\frac{17 + k}{2 + k} = \left(\frac{7 + k}{2 + k} \right)^2$, po úpravě $(17 + k) \cdot (2 + k) = (7 + k)^2$, dále $34 + 19 \cdot k + k^2 = 49 + 14 \cdot k + k^2$. Z toho vyjde k = 3. A následně q = 2. Pro kontrolu $a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $a_3 = 20$, nový člen vyjde vynásobením předchozího číslem 2.

8. Určete čtyři čísla, která jsou čtyřmi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti a jejichž dekadické logaritmy jsou čtyřmi po sobě jdoucími členy posloupnosti aritmetické s diferencí d = 1, přičemž součet těchto logaritmů je 22.

   Geometrickou posloupnost označíme g, $g_1,$ $g_2 = g_1 \cdot q$, $g_3 = g_1 \cdot q^2$, $g_4 = g_1 \cdot q^3$.
   Pro aritmetickou posloupnost platí $a_1 = \log g_1$, $a_2 = \log g_2 = a_1 + 1$, $a_3 = \log g_3 = a_1 + 2$, $a_4 = \log g_3 = a_1 + 3$.
   Pro zjednodušení můžeme ještě všude dosadit za g2, g3 a g4 vyjádření pomocí geometrické posloupnosti: $a_1 = \log g_1$, $\log g_1 \cdot q = a_1 + 1$, $\log g_1 \cdot q^2 = a_1 + 2$, $\log g_1 \cdot q^3 = a_1 + 3$.
   Teď můžeme nahradit $a_1 = \log g_1$, dostaneme tři rovnice $\log g_1 \cdot q = \log g_1 + 1$, $\log g_1 \cdot q^2 = \log g_1 + 2$, $\log g_1 \cdot q^3 = \log g_1 + 3$.
   Z první rovnice s použitím pravidel pro logaritmus součinu (logaritmus součinu je součet logaritmů) dostaneme $\log g_1 + \log q = \log g_1 + 1$, z toho vyplývá, že q = 10 (protože log q = 1). Chybí určit a1 nebo též q1. Součet logaritmů znamená součet členů aritmetické posloupnosti, z čehož vyplývá, že $4 \cdot a_1 + 6 = 22 \Rightarrow a_1 = 4$. A protože $a_1 = \log g_1$ a a1 = 4, je g1 = 10000. Potom g2 = 100000, g3 = 1000000, g4 = 10000000. Ověření: $\log g_1 = \log 10000 = 4$, $\log g_2 = \log 100000 = 5$, $\log g_3 = \log 1000000 = 6$, $\log g_4 = \log 10000000 = 7$.