Druhá a třetí odmocnina

Druhá odmocnina z nezáporného reálné čísla ($(a\in\mathbb{R}, a\geq 0)$) je takové nezáporné číslo x $(x\in\mathbb{R}, x\geq 0)$, že $x^2=a$. Píšeme $\sqrt{x}=a$.

Třetí odmocnina z nezáporného reálné čísla ($(a\in\mathbb{R}, a\geq 0)$) je takové nezáporné číslo x $(x\in\mathbb{R}, x\geq 0)$, že $x^3=a$. Píšeme $\sqrt[3]{x}=a$.

a je odmocněnec

Platí: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\cdot b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

Dále platí $\sqrt{a^{2\cdot k}}=a^k$ $\qquad$ $\sqrt[3]{a^{3\cdot k}}=a^k$

Částečné odmocňování

Podle definice a předcházejících pravidel můžeme, pokud se pod druhou odmocninou vyskytuje v součinu sudá mocnina nebo pokud se pod třetí odmocninou vyskytuje v součinu nějaká třetí mocnina, částečně odmocnit.

Příklady:

$\sqrt{24}=\sqrt{2^3\cdot 3}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2\cdot 3}=2\cdot\sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{x^7}=\sqrt{x^6\cdot x}=\sqrt{x^6}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{(x^3)^2}\cdot\sqrt{x}=x^3\cdot\sqrt{x}$

$\sqrt[3]{144}=\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot 3^2}=2\cdot\sqrt[3]{18}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{y^7}=\sqrt[3]{y^6\cdot y}\sqrt[3]{(y^2)^3}\cdot\sqrt[3]{y}=y^2\cdot\sqrt[3]{y}$

Takže:

$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4}+\sqrt{6}=2+\sqrt{6}$

$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{4}+\sqrt{6})$ $\qquad$ $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ $\qquad$ $\sqrt{5}\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{15})$

$\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6})$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{20})$

$\sqrt{36}$ $\qquad$ $\sqrt{2000}$ $\qquad$ $\sqrt{120}$

$\sqrt[3]{126}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{81}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2500}$

Usměrňování zlomků

Lépe se odmocňuje čitatel než jmenovatel, lépe si představíme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ než $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Jak se zbavit odmocniny ve jmenovateli? Je-li tam samotná nebo v součinu, vynásobením takovým výrazem, abychom dostali její příslušnou mocninu. Je-li tam v součtu či rozdílu, vynásobením takovým výrazem, abychom dostali ve jmenovateli pouze příslušné mocniny odmocnin:

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$

Upravte:

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

Odmocniny

N-tá odmocnina (n je přirozené číslo) z nezáporného reálného čísla a ($a \geq 0, a \in \mathbb{R}$) je takové nezáporné číslo x ($x \geq 0, x \in \mathbb{R}$), pro které platí: $x^n = a$.

Zapisujeme $\sqrt[n]{a} = x$; a je odmocněnec (základ odmocniny), n je odmocnitel

$\sqrt[3]{27} = 3$ protože $3^3 = 27$

$\sqrt[10]{1024} = 2$ protože $2^{10} = 1024$

Připomínám, že $\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{3} \neq \sqrt[8]{6}$ ani $\sqrt[15]{6}$ ani $\sqrt[15]{5}$. O sčítání nebo odčítání mocnin nevíme nic odlišného, než o sčítání nebo odčítání reálných čísel nebo výrazů. Pouze jsou-li odmocniny stejné, mohu sečíst jejich počet nebo ji vytknout před závorku.

Příklady:

$$5 \cdot \sqrt[4]{2} - 7 \cdot (\sqrt[4]{2} - 4 \cdot \sqrt[5]{3}) - 3 \cdot \sqrt[5]{3} = -2 \cdot \sqrt[4]{2} 25 \cdot \sqrt[4]{2}$$

Pravidla:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}; b \neq 0$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
5. $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

Upravte $\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[12]{2^{16}} \cdot \sqrt[12]{2^{21}} = \sqrt[12]{2^{37}} = 2^3 \cdot \sqrt[12]{2}$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^5}$$

$$\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot a}{b}} = \sqrt{a^2} = a \qquad a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[7]{a^{12}} = a \cdot \sqrt[7]{a^5}$$

$$\left(\sqrt[12]{a^8}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = a^2$$

$$\sqrt[4]{64 \cdot x^5 \cdot y^3 \cdot z^9} = \sqrt[4]{2^6 \cdot x^5 \cdot y^3 \cdot z^9} = a \cdot x \cdot z^2 \sqrt[4]{2^2 \cdot x \cdot y^3 \cdot z}$$

$$\frac{\sqrt[3]{(x^{-2} \cdot y^4)}}{\sqrt{(x^3 \cdot y^5)}} = \sqrt[6]{\frac{x^{-4} \cdot y^8}{x^9 \cdot y^{15}}} = \sqrt[6]{\frac{y^8}{x^{13} \cdot y^{15}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x^{13} \cdot y^6}} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{y \cdot x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}} = \sqrt[12]{\sqrt{2}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^9}} = \sqrt[10]{a^9}$$

$$\sqrt{x-a} + 12 \cdot \sqrt{x-a} - 9 \cdot \sqrt{x-a} = 4 \cdot \sqrt{x-a}$$

$$\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2} \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2} = a \cdot b$$

$$\sqrt[5]{x^3 \cdot y^2} \cdot \sqrt[5]{x^4 \cdot y^2} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}} = \sqrt[5]{x^{10}} = x^2$$

Mocniny s racionálními mocniteli

Každé racionální číslo r lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{m}{n}$, kde m je celé číslo a n je přirozené číslo.

Pro každé kladné reálné číslo a, celé číslo m a přirozené číslo n definujeme $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, a je základ mocniny (mocněnec), $\frac{m}{n}$ je mocnitel.

Protože například $\sqrt[4]{x^{20}}=x^5$ se dá napsat $x^{\frac{20}{4}}$

$\forall a,b\in\mathbb{R}^+, \forall r,s\in\mathbb{Q}:$

1. $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$
2. $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$
3. $(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$
4. $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

$x^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{3}{4}}=1$

$3^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{2^6}{3^3}$

$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{2}$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{(\sqrt{a})^{\frac{1}{3}}}{\left(a\sqrt[3]{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{6}}}{\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{4}{6}}=a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$