Mocniny a odmocniny

Mocniny s přirozeným exponentem

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}: a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$, a je základ mocniny, n je exponent a na pravé straně je v součinu právě n-krát se vyskytující a.

S touto definicí vystačíme na všechny možné příklady typů $a^n \cdot a^m, \frac{a^n}{a^m}, (a^n)^m, a^n \cdot b^n, \frac{a^n}{b^n}$

Věty a důkazy:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}: a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}, n > m: \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}: (a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}: a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}: \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Dodatek: $1^n = 1$

D1: Podle definice $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $a^m = a \cdot a \ldots \cdot a$. Na pravé straně dostáváme součin *n*+*m* čísel *a*, což je zpětně podle definice a^{n+m}

D2: Podle definice $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $a^m = a \cdot a \ldots \cdot a$. Na pravé straně dostáváme zlomek, kde v čitateli je součin *n* čísel a ve jmenovateli součin *m* čísel *a*, což po vykrácení znamená, že zbude právě *n-m* součin čísel *a* a to je zpětně podle definice a^{n-m}

D3: Podle definice $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $c^m = c \cdot c \ldots \cdot c$. Na pravé straně dostáváme součin *m* čísel a^n , což je zase součin *n* čísel *a*, tedy dohromady právě součin $n \cdot m$ čísel *a*, což je zpětně podle definice $a^{n \cdot m}$

D4: Podle definice $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $b^n = b \cdot b \ldots \cdot b$. Na pravé straně dostáváme součin *n* čísel *a* krát součin *n* čísel *b*. Platí komutativnost, takže můžeme součin $a \cdot a \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \ldots \cdot b$ přeuspořádat tak, že dostaneme $a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots \cdot a \cdot b$, kde dvojic $a \cdot b$ je právě *n*, což je zpětně podle definice $(a \cdot b)^n$

D5: Podle definice $a^n = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $b^n = b \cdot b \ldots \cdot b$. Na pravé straně dostáváme součin *n* čísel *a* děleno součin *n* čísel *b*. Pro násobení zlomků platí, že násobíme čitatel s čitatelem a jmenovatel se jmenovatelem a protože v čitateli i ve jmenovateli máme jen součiny, tak můžeme zlomek rozdělit na *n* zlomků $\frac{a}{b}$, což je zpětně podle definice $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Příklady:

$x^2 \cdot x^4 \cdot x^3 \qquad \frac{y^8}{y^4} \qquad (3^2)^3 \qquad 4^2 \cdot 3^2 \qquad \frac{2^3}{3^3} \qquad \frac{a^3 \cdot a^5 \cdot a^4}{\frac{(x^4 \cdot y^3)^2}{(x^2 \cdot y)^3}} \qquad \frac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^8}{2^5 \cdot 2^2}$

Napište jako součin přirozených mocnin: $\frac{18^4 \cdot 27^3 \cdot 8^6}{12^7 \cdot 16^3}$