Mocniny s celým exponentem

K nim se potřebujeme *vypořádat* s nulovým exponentem a se záporným exponentem.

Obojí je snadno pochopitelné, když budeme řešit mezní příklady mocnin s přirozeným exponentem:

$\frac{a^n}{a^n}=1$ Podle věty 2. sice není $n>n$, ale připustíme-li na okamžik možnost řešení, dostaneme nulový exponent. Proto dodefinujeme: $\forall\, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a^0=1$ s výjimkou $a = 0$.

A dále bude-li ve zlomku v čitateli 1, kterou teď můžeme nahradit nultou mocninou jakéhokoliv čísla znovu podle věty 2. by se dalo vytušit, že mocnina se záporným exponentem je převrácená hodnota mocniny s kladným exponentem. Dodefinujeme, že $\forall\, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, n\in\mathbb{N}: a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Věty 1. - 5. můžeme teď rozšířit pro celé exponenty.

$\frac{(-2)^3\cdot 2^2}{(-2)^2\cdot 2}$ $\frac{(2^3\cdot 3)^3}{(2\cdot 3)^2}$ $\frac{|(-3)^3|}{2^5}\cdot\frac{(-2)^3}{3}$

$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)^0$ $\frac{|-2|^2\cdot 4^3}{|-16|}$ $\frac{(2-|-3|)^3}{5^2}$

Rozložte na součin prvočísel následující čísla:

$108=2^2\cdot 3^3$ $225=3^2\cdot 5^2$ $117=3^2\cdot 13$ $100=2^2\cdot 5^2$
$343=7^3$

$300=2^2\cdot 3\cdot 5^2$ $1\,250=2\cdot 5^7$

Dokažte, že $\forall\, a\in\mathbb{R}; \forall\, n\in\mathbb{N}: a<0\Rightarrow a^{2\cdot n}<0$

Dokažte, že $\forall\, a\in\mathbb{R}; \forall\, n\in\mathbb{N}: a<0\Rightarrow a^{2\cdot n-1}<0$

Příklad se zrnky:

$p_1=1=2^0;\ p_2=2=2^1;\ p_3=4=2^3;\ p_4=8=2^3;\ p_5=16=2^4;\ p_6=32=2^5;\ p_k=2^{k-1};\ p_{64}=2^{63}$

porovnejte počet zrn na prvních deseti políčkách s počtem zrn na 11: políčku:

součet zrn na prvních deseti políčkách: $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023$

kolikrát víc zrn je na 64. než na 50. políčku: $\frac{2^{63}}{2^{49}}=2^{14}=16384$

vyjádřete počet zrn na 21. a 61. políčku jako mocninu počtu zrn na políčku 11:

$p_{11}=2^{10};\ p_{21}=2^{20}=p_{11}^2;\ p_{61}=2^{60}=p_{11}^6$

$(p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5\cdot p_6\cdot p_7\cdot p_8\cdot p_9\cdot p_{10})^3=p^{(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)}\cdot 3=p^{135}$

$\left(\frac{p_{53}\cdot p_{48}}{p_{23}\cdot p_7}\right)^3:\frac{p_{60}}{p_{12}}$ $\left(p_{11}^3\cdot\frac{1}{p_{15}^2}\right)^2:\left[\left(\frac{1}{p_{30}}\right)^3\right]^2$

$(6\cdot a^3\cdot b^{-2}\cdot c^{-1})\cdot(3\cdot a^{-5}\cdot b^3\cdot c)$

$(3\cdot a^{-2}\cdot b^3\cdot c^{-3})^{-2}$

$(4\cdot a^{-3}\cdot b^{-4}\cdot c^{-3}):(16\cdot a^3\cdot b^{-3}\cdot c^3)$

$\left(a^{-2}-\frac{b^{-2}}{c^2}\right)^{-1}$ $\left(\frac{a^2-b^2}{c^{-2}}\right)^{-1}$ $\left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{c^{-2}}\right)^{-1}$