Vlastnosti logaritmu

Jiná definice logaritmu:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, neboť $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Další vlastnosti logaritmu:

$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$
$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge s \in \mathbb{R}^+\; q = a^{\log_a q}$

Příklad 1:

Určete hodnotu logaritmu:

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 0{,}125$ c) $\log_4 8$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

Řešení:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, neboť $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

a) $\log_3 81 = y \Leftrightarrow 3^y = 81 \Rightarrow y = 4$

b) $\log_2 0{,}125 = y \Leftrightarrow 2^y = 0{,}125 \Rightarrow 2^y = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^y = 2^{-3} \Rightarrow y = -3$

c) $\log_4 8 = y \Leftrightarrow 4^y = 8 \Rightarrow 2^{2\cdot y} = 2^3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 16 \Rightarrow 2^{-y} = 2^4 \Rightarrow y = -4$

Příklad 2:

Určete logaritmované číslo:

a) $\log_5 x = 2$ b) $\log_{0,5} a = 4$ c) $\log_3 s = \frac{3}{2}$ d) $\log_4 x = -3$

Řešení:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, neboť $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

a) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x \Rightarrow x = 25$

b) $\log_{0,5} a = 4 \Leftrightarrow 0{,}5^4 = a \Rightarrow a = \frac{1}{16}$

c) $\log_3 s = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^{\frac{3}{2}} = s \Rightarrow s = \sqrt{27}$

d) $\log_4 x = -3 \Leftrightarrow 4^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{64}$

Příklad 3:

Určete základ logaritmu:

a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a 625 = 2$ c) $\log_a 49 = -2$ d) $\log_a 13 = 5$

Řešení:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, neboť $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

a) $\log_a 16 = 4 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Rightarrow a^4 = 2^4 \Rightarrow a = 2$

b) $\log_a 625 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 625 \Rightarrow a^2 = 5^4 \Rightarrow a^2 = (5^2)^2 \Rightarrow a = 5^2 \Rightarrow a = 25$

c) $\log_a 49=-2 \Leftrightarrow a^{-2}=49 \Rightarrow a^{-2}=7^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2=7^2 \Rightarrow \frac{1}{a}=7 \Rightarrow a=\frac{1}{7}$

d) $\log_a 13=5 \Leftrightarrow a^5=13 \Rightarrow a=\sqrt[5]{13}$

Protipříklady a vzorové příklady

$\log_{10} -5$ záporné číslo nelze logaritmovat
$\log_{-2} 4$ základ nesmí být záporný
$\log_1 16$ základ nesmí být jedna
$\log_{16} 16=1$ základní pravidlo
$\log_{17} 1=0$ základní pravidlo

Další vlastnosti logaritmů:

1. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge x, y \in \mathbb{R}^+ : \log_a x+\log_a y=\log_a (x \cdot y)$

Důkaz:

podle definice:

$\log_a x=r \Leftrightarrow a^r=x$
$\log_a y=s \Leftrightarrow a^s=y$
$\log_a (x \cdot y)=t \Leftrightarrow a^t=x \cdot y$

pravidla pro umocňování: $x \cdot y=a^r \cdot a^s=a^{r+s}$
exponenciální rovnice: $x \cdot y=x \cdot y \Rightarrow a^{r+s}=a^t \Rightarrow r+s=t$

2. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge x, y \in \mathbb{R}^+ : \log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

Důkaz:

podle definice:

$\log_a x=r \Leftrightarrow a^r=x$
$\log_a y=s \Leftrightarrow a^s=y$
$\log_a \frac{x}{y}=t \Leftrightarrow a^t=\frac{x}{y}$

pravidla pro umocňování: $\frac{x}{y}=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

exponenciální rovnice: $\frac{x}{y}=\frac{x}{y} \Rightarrow a^{r-s}=a^t \Rightarrow r-s=t$

3. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge x, n \in \mathbb{R} : \log_a x^n=n \cdot \log_a x$

Důkaz:

Pro $n \in \mathbb{N}$ je evidentní: Součet n sčítanců $\log_a x$ a podle pravidla 1 toto pravidlo platí
Pro $n \in \mathbb{R}$ podle definice levá strana $\log_a x^n=r \Leftrightarrow a^r=x^n$; podle definice pravá strana $n \cdot \log_a x=s$ (což musíme upravit na $\log_a x=\frac{s}{n}; n \neq 0$, pak $a^{\frac{s}{n}}=x$. Zbývá dokázat, že $r=s$, což – upravíme-li $a^{\frac{s}{n}}=x$ umocněním na n-tou – dostaneme $a^s=x^n$.
Příklady:

Příklad 4:

Upravte na jeden logaritmus

a) $\log_4 x+\log_4 x^3$ b) $\log_3 y^2-\log_3 y$ c) $3-\log_{10} x$ d) $5+\log_{\frac{1}{5}} x$ e) $5 \cdot \log_6 x-2$

Řešení:

a) Podle pravidla 1: $\log_4 x + \log_4 x^3 = \log_4 x^4$; podle pravidla 3 $\log_4 x^4 = 4\log_4 x$

b) Podle pravidla 2: $\log_3 y^2 - \log_3 y = \log_3 \frac{y^2}{y} = \log_3 y$

c) Podle definice $3 = \log_{10} 10^3$; podle pravidla 2: $\log_{10} 10^3 - \log_{10} x = \log_{10} \frac{10^3}{x}$

d) Podle definice $5 = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}^5$; podle pravidla 1: $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}^5 + \log_{\frac{1}{5}} x = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}^5 \cdot x = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{5^5}$

e) Podle definice $2 = \log_6 6^2$; podle pravidla 3: $5 \cdot \log_6 x = \log_6 x^5$; podle pravidla 2: $\log_6 x^5 - \log_6 6^2 = \log_6 \frac{x^5}{6^2}$

Příklad 5:

Zlogaritmujte výrazy:

a) $\frac{x+7}{x^2}$ b) $\frac{x^2 \cdot y^3}{z^4}$

Řešení:

a) $\log_a \frac{x+7}{x^2} = \log_a (x+7) - 2 \cdot \log_a x$

b) $\log_a \frac{x^2 \cdot y^3}{z^4} = 2 \cdot \log_a x + 3 \cdot \log_a y - 4 \cdot \log_a z$