Logaritmické rovnice

Pro všechna kladná reálná čísla x, y a pro každé reálné kladné číslo a různé od jedné platí: Je-li $\log_a x = \log_a y$, pak $x = y$.

Příklad 1:

a) $\log_2 x = 64$ b) $\log_3 x = 17$ c) $\log_{\frac{1}{5}}(2\cdot x) - 2 = \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

Řešení:

a) 64 musíme zapsat jako logaritmus nějakého čísla. Víme, že $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. $64 = \log_2 2^{64}$
$\log_2 x = \log_2 2^{64} \Rightarrow x = 2^{64}$

b) stejně tak $17 = \log_3 3^{17}$. $\log_3 x = \log_3 3^{17} \Rightarrow x = 3^{17}$

c) Možností máme víc – 1) převést logaritmy s neznámou na jednu stranu, čísla na druhou a upravit do tvaru $\log_a x = \log_a y$; 2) převést všechno na jednu stranu a na druhé $0 = \log_a 1$; 3) upravit každou stranu zvlášť a pak použít pravidlo o řešení logaritmických rovnic

Nejdříve si ale musíme uvědomit, že $2 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2$

1)
$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{5}}(2\cdot x) - \log_{\frac{1}{5}}(x+1) &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2\\
\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{2\cdot x}{x+1}\right) &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2\\
\frac{2\cdot x}{x+1} &= \frac{1}{25}\\
50\cdot x &= x+1\\
x &= \frac{1}{49}
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{5}}(2\cdot x) - \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \log_{\frac{1}{5}}(x+1) &= \log_{\frac{1}{5}} 1\\
\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{\left(\frac{2\cdot x}{(x+1)}\right)}{\frac{1}{25}}\right) &= \log_{\frac{1}{5}} 1\\
\frac{50\cdot x}{x+1} &= 1\\
50\cdot x &= x+1\\
x &= \frac{1}{49}
\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{5}}(2\cdot x) - \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 &= \log_{\frac{1}{5}}(x+1)\\
\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{2\cdot x}{\frac{1}{25}}\right) &= \log_{\frac{1}{5}}(x+1)\\
50\cdot x &= x+1\\
x &= \frac{1}{49}
\end{aligned}$$

Nejméně vhodná, ale možná nejjasnější, je druhá metoda. Nejrychlejší je použití třetí – s pomocí vlastností logaritmů upravíme každou stranu zvlášť a pak dáme do rovnosti logaritmované výrazy.
POZOR: Zatím jsme se nezabývali tím, že logaritmované výrazy/čísla jsou kladná, měli bychom ale psát na začátku podmínky a brát to v úvahu!!!

Příklady 2:

a) $\log x+\log(x+1)=\log(2\cdot x)$ b) $\log x-\log(2x-5)=\log 3$ c) $\dfrac{3+\log x}{2-\log x}=4$

Řešení:

Budeme tedy řešit třetí metodou – upravíme každou stranu zvlášť. A podmínky!
a) logaritmované výrazy mají být kladné => $(x>0 \wedge x+1>0 (\Rightarrow x>-1) \wedge 2\cdot x>0) \Rightarrow x>0$
pravidlo o sčítání: $\log(x\cdot(x+1))=\log(2\cdot x)$
logaritmická rovnice podle pravidla: $x^2+x=2\cdot x | -2\cdot x$
po úpravě: $x^2-x=0$
po vytknutí: $x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0 \wedge x_2=1$
Podmínka říká, že $x>0$, proto $P=\{1\}$
Zkouška: $L=\log 1+\log(1+1)=0+\log 2=\log 2$; $P=\log(2\cdot 1)=\log 2$; $L=P$
Proč nespočítáme $\log 2$ **?** NEJDE o celé ani racionální číslo. Podle definice $\log_{10} 2=y \Leftrightarrow 10^y=2$. Každý obeznámený s logaritmy ví, že $0<\log 2<1$ a to pro první přiblížení stačí.
b) podmínky: $\left(x>0 \wedge 2\cdot x-5>0\left(\Rightarrow x>\dfrac{5}{2}\right)\right) \Rightarrow x>\dfrac{5}{2}$
pravidlo o dočítání: $\log\left(\dfrac{x}{2\cdot x-5}\right)=\log 3$
logaritmická rovnice podle pravidla: $\dfrac{x}{2\cdot x-5}=3$
vynásobíme $(2\cdot x-5)$: $x=6\cdot x-15$
upravíme: $15=5\cdot x \Rightarrow x=3$
Podmínka říká, že $x>\dfrac{5}{2}$, tedy $P=\{3\}$
Zkouška: $L=\log 3-\log(2\cdot 3-5)=\log 3-\log 1=\log 3$; $P=\log 3$; $L=P$
c) podmínky: $x>0$; $2-\log x\neq 0 \Rightarrow 2\neq \log x \Rightarrow x\neq 100$
vynásobíme rovnici $2-\log x$: $3+\log x=8-4\cdot\log x$
upravíme: $5\cdot\log x=5$
upravíme: $\log x=1 \Rightarrow x=10$
Podmínky jsou splněny. $P=\{10\}$

$$\frac{3+\log x}{2-\log x}=4$$

Zkouška: $L=\dfrac{3+\log 10}{2-\log 10}=\dfrac{3+1}{2-1}=4$; $P=4$; $L=P$

Příklad 3:

a) $\log x+\log x^2+\log x^3=1$ b) $\log(x-2)-\log(4-x)=1-\log(13-x)$ c) $\dfrac{\log(2\cdot x+13)}{\log(x+5)}=2$

d) $\log\sqrt{2\cdot x+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\log(x-3)=1+\log 0{,}3$

Výsledky
a) $x=\sqrt[6]{10}$ b) $x=3$ c) $x=-2$ d) $x=4$

Rovnice typu $a^x=y$

Rovnice typu $a^x=y$ je rozumné převést na logaritmické: platí-li $\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x$, pak

$$a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$$

$$2^x=100 \Leftrightarrow x=\log_2 100=\log_2 10^2=2\cdot\log_2 10$$

Na kalkulačce a v tabulkách ale máme logaritmy o základu 10 nebo e. Co s tím?
Obě strany rovnice zlogaritmujeme logaritmem o základu 10, pak: $\log a^x=\log y$. Podle třetího pravidla

$$\log a^x=x\cdot\log a \quad , \quad x=\frac{\log y}{\log a}$$

Zpátky k naší rovnici $x=\frac{\log 100}{\log 2}=\frac{2}{\log 2}$

A zkouška? $L=2^{\frac{2}{\log 2}}$. S tím bychom si také neporadili, takže znovu zlogaritmujeme:

$\log L=\log 2^{\frac{2}{\log 2}}$

$\log L=\frac{2}{\log 2}\cdot\log 2$ => $\log L=2$ a tedy $L=100$

Příklad 4:

a) $5^{x-2}=\frac{10}{3}$ b) $3^{x}=0{,}25$ c) $5^{3-x}=3^{2\cdot x-1}$

Řešení:

a)

$$\log 5^{x-2}=\log\frac{10}{3}$$
$$(x-2)\cdot\log 5=\log\frac{10}{3}$$
$$x\cdot\log 5-2\cdot\log 5=\log\frac{10}{3}$$
$$x\cdot\log 5=\log\frac{10}{3}+\log 5^{2}$$
$$x\cdot\log 5=\log\frac{250}{3}$$
$$x=\frac{\log\frac{250}{3}}{\log 5}$$

b)

$$\log 3^{x}=\log 0{,}25$$
$$x\cdot\log 3=\log 0{,}25$$
$$x=\log\frac{0{,}25}{\log}3$$

c)

$$\log 5^{3-x}=\log 3^{2\cdot x-1}$$
$$(3-x)\cdot\log 5=(2\cdot x-1)\cdot\log 3$$
$$3\cdot\log 5-x\cdot\log 5=2\cdot x\cdot\log 3-\log 3$$
$$3\cdot\log 5+\log 3=x\cdot(2\cdot\log 3+\log 5)$$
$$\log(5^{3}\cdot 3)=x\cdot\log(3^{2}\cdot 5)$$
$$x=\frac{\log(5^{3}\cdot 3)}{\log(3^{2}\cdot 5)}$$