Lineární rovnice

Jednou z prvních úloh zapisovaných v matematice, je početní úloha, ve které máme neznámou a k ní přičítáme nebo odčítáme nějaké číslo a dostaneme jiné číslo. Úloha vede na první úpravy typu: *přičtěme nebo odečtěme od obou stran rovnice stejné číslo*. Velice brzy se dostáváme k podobné úloze, kdy neznámou násobíme číslem, abychom dostali jiné číslo. Úloha vede na další úpravy typu: *vynásobme nebo vydělme obě strany rovnice stejným číslem*. Cílem obou úprav je dostat na jedné straně neznámou a na druhé číselný výraz, který umíme spočítat tak, abychom mohli jednoznačně říci, jaké číslo představuje neznámá.

Jára Cimrman matematik ...

Jak je známo, Jára Cimrman byl světoběžník, vynálezce a objevitel mnoha přírodních zákonitostí. Málokdo však ví o jeho matematických vlohách, kterými udivoval již jako malý žák. Zde předkládám Cimrmanovo řešení příkladu s rovnicí o dvou neznámých s vysvětlením, které se dochovalo na kousku papírku u Cimrmanovy starší sestry Luisy:

$$\begin{aligned} 9 + 3x &= 9y + 3 \\ y + x &= 9 + 3 + 9 + 3 \\ y + x &= 24 \\ y &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Z výkladu, který malý Cimrman podal, vyplývá, že neznámé v rovnici chápal jako dvě veličiny, které se vzájemně neznají. Vytkl si tedy za cíl ony dvě neznámé seznámit, to znamená dostat je co nejblíže k sobě. A nejen to. Zbavit je ostychu i před ostatními čísly, která se navzájem znají. Předpokládal, že při seznamování vyjeví čísla svou pravou totožnost.
A tak převedl čísla z jedné strany na druhou: známé shromáždil na jedné straně a neznámé na druhé straně rovnice. Zvláštností jeho postupu bylo, že při převádění ani neměnil znaménko, ani násobení v dělení. "Jak můžeš takhle ta čísla převádět?" ptal se Cimrmana starší kvintán Tausinger, který si s rovnicí nevěděl rady. "Jako po lávce", odpověděl bezelstně Cimrman, ukazuje na rovnítko. Rovnici y + x = 24 přečetl Cimrman jednoduše: y stojí vedle x jako číslo 2 vedle čísla 4. Tedy y = 2, x = 4.
A skutečně - dosadíme-li do dané rovnice
9 + 3x = 9y + 3
9 + 3.4 = 9.2 + 3
dostaneme správný výsledek 21 = 21.
Prof. Fiedler soudí, že tento výsledek nemá s matematikou nic společného a že jeho výsledek je dílem náhody. Nejsme matematikové, abychom se mohli k Cimrmanovu postupu odborně vyjádřit. Skutečností však zůstává, že sedmiletý Cimrman dospěl v kratším čase k témuž výsledku, k němuž se zdlouhavě propracovával kvintán Tausinger, a na této zkušenosti nemůže změnit nic ani pan profesor Fiedler (který, jak máme zjištěno, musel mimochodem při maturitě na solnohradském gymnáziu dvakrát konat opravnou zkoušku právě z matematiky).

(in prof. Ladislav Smoljak – dr. Zdeněk Svěrák, Cimrman v říši hudby)

Potřebné pojmy

Rovnici o jedné neznámé x rozumíme zápis tvaru $l(x)=p(x)$,
kde $l(x)$ a $p(x)$ jsou výrazy obsahující proměnnou x a konstanty, $l(x)$ se nazývá levá strana rovnice, $p(x)$ se nazývá pravá strana rovnice. Řešit rovnici o neznámé $x\in M$ $(M\subset\mathbb{R})$ znamená najít všechna taková $x\in M$, pro která platí, že výrazy $l(x)$ a $p(x)$ mají stejnou hodnotu. Každé takové $x\in M$ se nazývá **řešení** nebo **kořen rovnice**. **Množinu všech řešení (kořenů) rovnice** označuje ***P***.
Pro řešení rovnice provádíme úpravy výrazů na levé a pravé straně (pravidla pro jejich úpravu jsme probrali) a úpravy celé rovnice.

Povolené úpravy

1. K oběma stranám rovnice přičteme stejný výraz (který má pro všechna čísla z množiny, v níž rovnici řešíme, smysl).
2. Obě strany vynásobíme stejným výrazem, který pro všechna čísla z množiny, v níž rovnici řešíme, nabývá pouze **nenulových hodnot**.

Pozn.: ad 1) Odečítání je totéže jako přičítání opačného výrazu
ad 2) Dělení je totéž jako násobení výrazem převráceným

Když budeme mluvit o odečítání a dělení, budeme mít tedy na mysli přičítání a násobení dle povolených úprav. Pozor – někdy je třeba se nad úpravami zamyslet, zda skutečně patří mezi tyto povolené úpravy. Protože povolené úpravy vedou k rovnici s množinou stejných řešení, říkáme jim **ekvivalentní úpravy**.

Lineární rovnice

Každou rovnici, která se dá převést na tvar $a \cdot x + b = 0$, kde a je reálné nenulové číslo ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) a b je libovolné reálné číslo ($b \in \mathbb{R}$), nazýváme **lineární rovnicí**.

Přičteme-li k oběma rovnicím číslo $-b$ (povolená úprava 1.), dostaneme:

$$a \cdot x = -b$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem $\frac{1}{a}$ (povolená úprava 2.), dostaneme:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Lineární rovnice o neznámé $x \in \mathbb{R}$ má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$. Tedy jinak řečeno: Množina P všech řešení rovnice $a \cdot x + b = 0$ o neznámé $x \in \mathbb{R}$ je jednoprvková, $P = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

Poznámky:

1. Pro $a = 0$ se nejedná o lineární rovnici, nicméně rovnice stále ještě může mít řešení, pokud bude rovno nule i b. Jde pak o rovnici $0 \cdot x + 0 = 0$ a ta dosahuje rovnosti levé a pravé strany pro jakékoliv reálné číslo dosazené za neznámou x, $P = \mathbb{R}$.
2. Pokud bude $a = 0$ a $b \neq 0$, kde o rovnici $0 \cdot x + b = 0$, tedy $b = 0$, kde k rovnosti nedochází pro jakékoliv reálné číslo dosazené za neznámou x, $P = \emptyset$.
3. Pokud bude neznámá $x \in M, M \subset \mathbb{R}$, potom lineární rovnice $a \cdot x + b = 0$ nemusí mít žádné řešení, stačí aby lineární rovnice $a \cdot x + b = 0$ měla řešení v množině $\mathbb{R} \setminus M$.
   Příklad: najděte všechna celá čísla, která jsou řešením rovnice $2 \cdot x - 7 = 0$. Řešením lineární rovnice pro $x \in \mathbb{R}$ je $x = \frac{7}{2}$, což není celé číslo.

Příklady:

1) přijímací zkoušky na Purkyňovo gymnázium, Strážnice:

Myslím si číslo.Když k němu přičtu 25,výsledek vydělím dvěma a pak odečtu 10, dostanu 18.

Myslím si číslo.Když od něj odečtu 25,výsledek vynásobím dvěma a pak přičtu 10,dostanu 18.

Myslím si číslo.Vynásobím ho dvěma a přičtu 25,výsledek vynásobím třemi a když odečtu 10, dostanu 120.

2) Myslím si číslo, vynásobím ho sedmičkou, odečtu deset, přičtu 15 a vydělím číslem, které si myslím … výsledek je osm. Na jaké číslo jsem myslel?

3) Řešte zpaměti:

	$3 \cdot x = 81$	$4 \cdot x = 26$	$4{,}5 \cdot x = 9$	$-x = 17$
$-5 \cdot x = 60$	$x - 9 = 15$	$x + 8 = 14$	$26 \cdot x - 13 = 13$	$-5 \cdot x + 15 = 5$

4) Řešte rovnice o neznámé $x \in \mathbb{R}$ $\quad -9 \cdot x + 7 = 70 \quad 15 \cdot x - 17 = 34 \quad -14 + 3 \cdot x = -17$

$0{,}8 \cdot x - 4{,}5 = 2 \quad 11 \cdot x + 4 = -16 \quad -8 + 3 \cdot x = 7{,}4 \quad 2 \cdot x - 3 = 6 \quad 18 = -4{,}5 \cdot x + 9$

5) Řešte rovnice o neznámé $x \in \mathbb{Z}$: $\quad -4 \cdot x + 15 = 39 \quad 3 \cdot x - 2 = 6$

Zkouška dosazením do původního zadání u lineárních rovnic není součástí řešení a nemusí se provádět, ale pokud nebudeme opakovat postup řešení, máme šanci odhalit početní chybu, pokud zkouška nevyjde.

$$\begin{aligned}
3 \cdot (x-2) - 5 \cdot (3-x) &= (1-x) + (3 \cdot x - 5) \\
3 \cdot x - 6 - 15 + 5 \cdot x &= 1 - x + 3 \cdot x - 5 \\
8 \cdot x - 21 &= 2 \cdot x - 4 \quad \vdots \quad + (21 - 2 \cdot x) \\
6 \cdot x &= 17 \quad \vdots \quad \cdot \frac{1}{6} \\
x &= \frac{17}{6}
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$l\left(\frac{17}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{17}{6} - 2\right) - 5 \cdot \left(3 - \frac{17}{6}\right)$$

$$3 \cdot \left(\frac{17-12}{6}\right) - 5 \cdot \left(\frac{18-17}{6}\right) = \frac{15}{6} - \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$p\left(\frac{17}{6}\right) = \left(1 - \frac{17}{6}\right) + \left(3 \cdot \frac{17}{6} - 5\right)$$

$$\left(\frac{6-17}{6}\right) + \left(\frac{51-30}{6}\right) = -\frac{11}{6} + \frac{21}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Výraz na levé a pravé straně se pro $x = \frac{17}{6}$ rovnají, takže $\frac{17}{6}$ je řešením rovnice. $P = \left\{\frac{17}{6}\right\}$

Doporučený postup pro řešení rovnic

1. Nacházejí-li se v rovnici zlomky, vynásobíme obě strany jejich nejmenším společným násobkem
2. Rovnici upravíme do tvaru $c \cdot x + d = e \cdot x + f$, kde c, d, e, f jsou reálná čísla.
3. Rovnici převedeme do tvaru $a \cdot x = -b$, ze které určíme neznámou x.
4. Provedeme zkoušku (která není součástí řešení), abychom se pokusili vyloučit chyby z řešení.
5. Zapíšeme množinu řešení P.

Poznámka: Tento postup je univerzální, v mnoha případech můžeme postupovat jednodušeji.

1. $2 \cdot (x-1) - 3 \cdot (x-2) + 4 \cdot (x-3) = 2 \cdot (x+5)$ $\qquad P = \{18\}$
2. $5 \cdot x - 4 + 2 \cdot (3 - 2 \cdot x) = 2 \cdot x - 7$ $\qquad P = \{9\}$
3. $2 \cdot (x+5) = 4 \cdot (x-3) - 3 \cdot (x-2) + 2 \cdot (x+1)$ $\qquad P = \{14\}$
4. $\frac{3 - 2 \cdot y}{5} + 8 = \frac{5 + 2 \cdot y}{2} - 2$ $\qquad P = \left\{\frac{81}{14}\right\}$
5. $5 - \frac{y}{3} = \frac{7}{2} - \frac{4 \cdot y + 1}{8}$ $\qquad P = \left\{-\frac{39}{4}\right\}$
6. $5{,}4 - \frac{y}{0{,}2} = \frac{3cdot\,y}{0{,}5} - 4$ $\qquad P = \left\{\frac{47}{55}\right\}$
7. Řešte rovnici $a \cdot x + 3 = 5 - 3 \cdot a$ pro a=1; 5; -3;0

   $P(1) = \{-1\}, P(5) = \left\{-2\frac{3}{5}\right\}, P(-3) = \left\{3\frac{2}{3}\right\}, P(0) = \{\}$
8. Určete všechna reálná čísla b, pro které rovnice $4 + \frac{2 \cdot b \cdot x}{5} = -3 \cdot b \cdot x$ nemá žádné řešení. (pro b = 0)