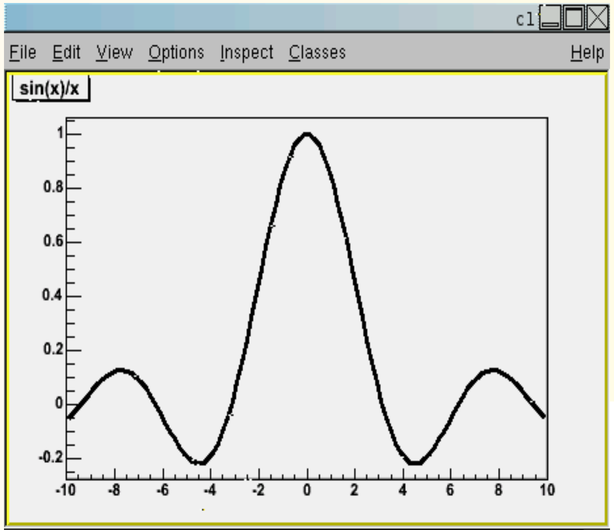
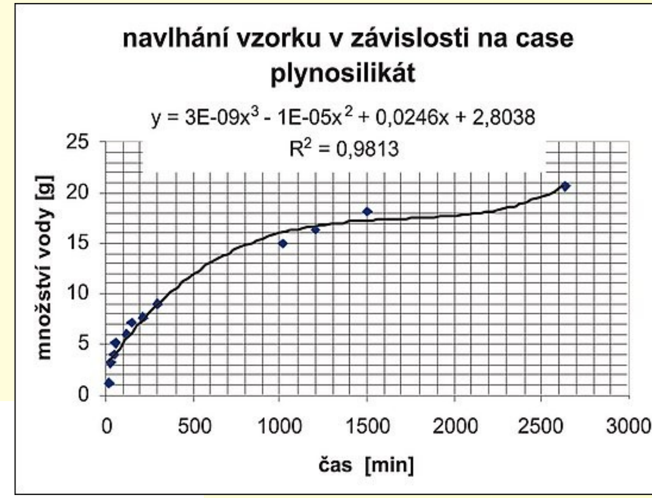
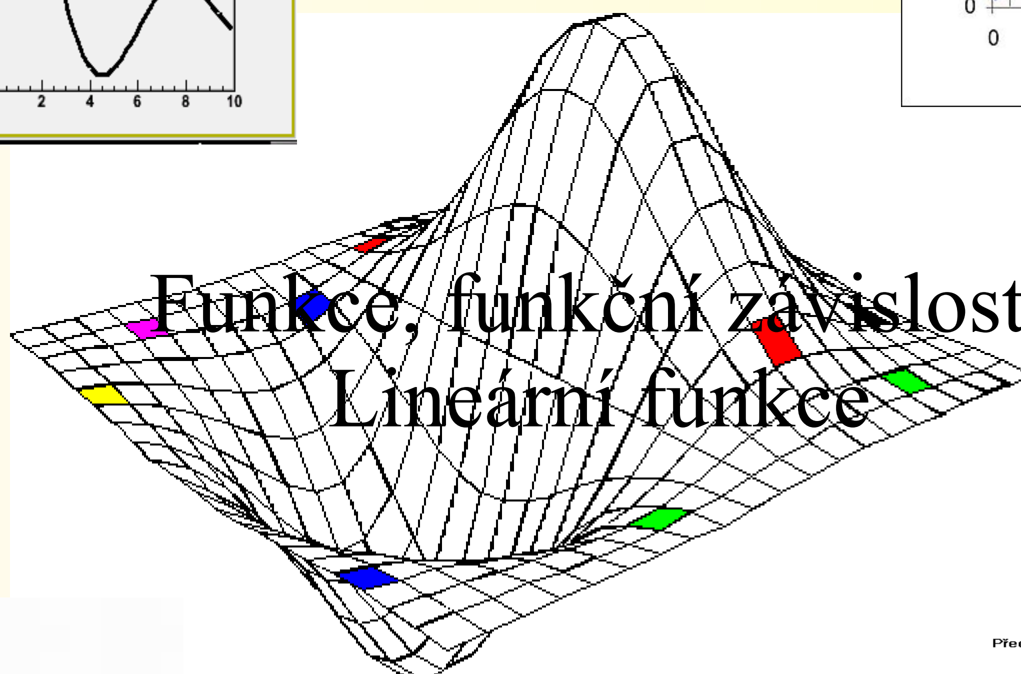
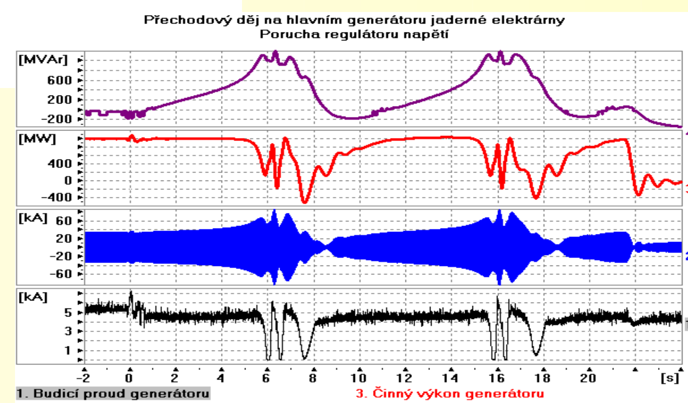
Funkce, funkční závislosti
Lineární funkce









Obsah:

Z Návrat na tento snímek s obsahem

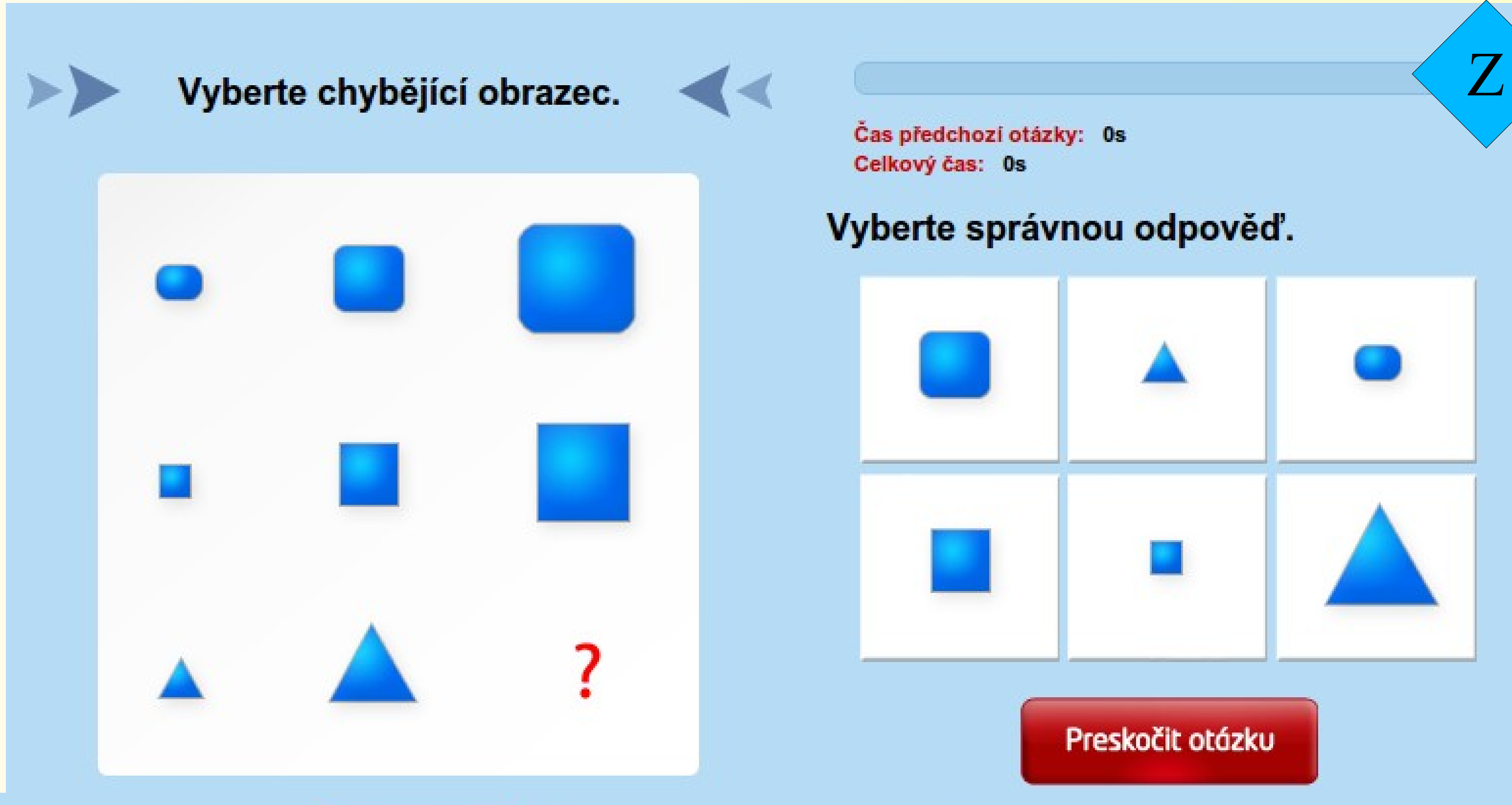
Z

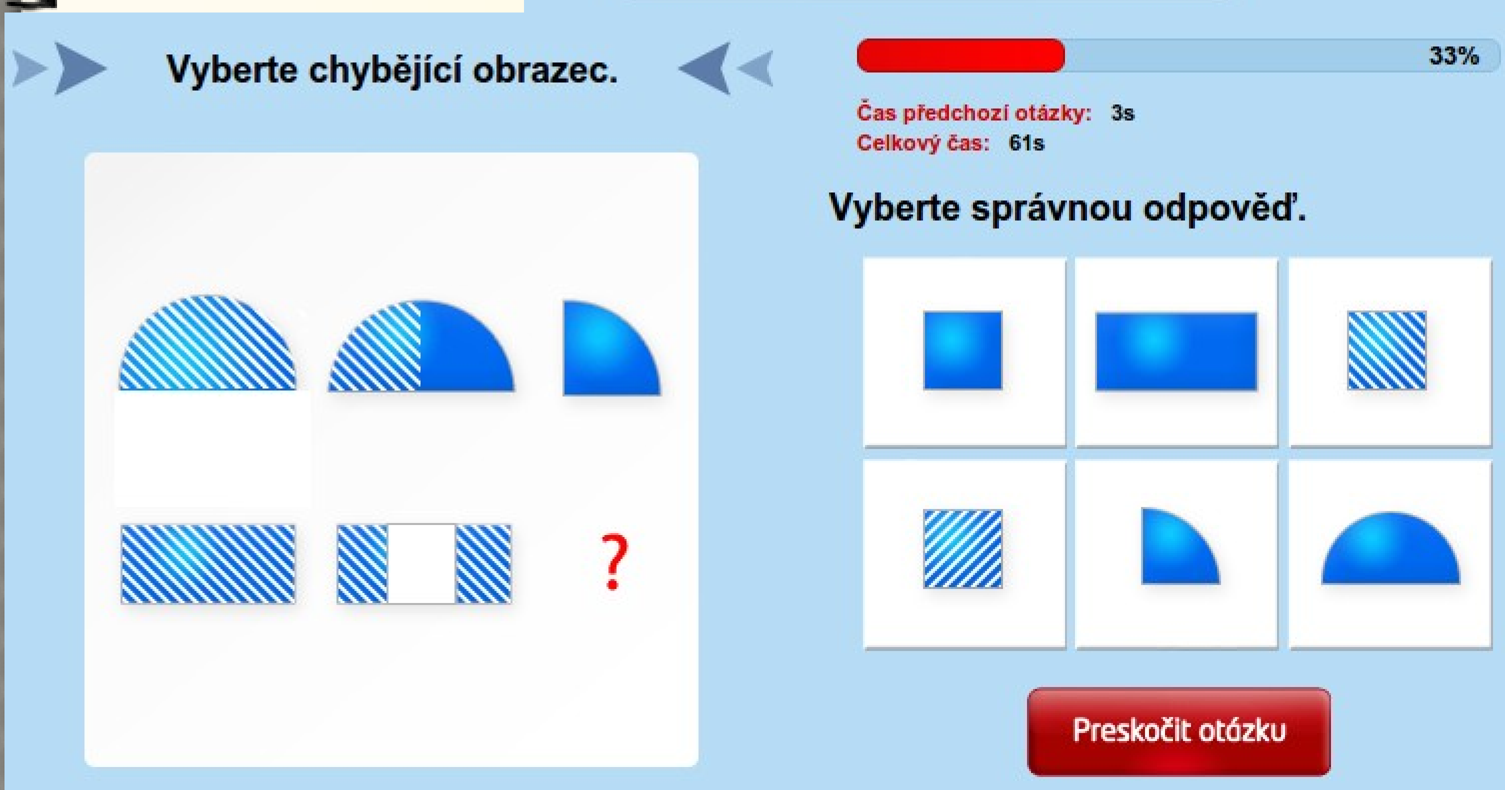
Motto: „Kolik třešní, tolik višní.“

„Čím je jelen starší, tím má větší parohy.“
„Jak se do lesa volá, tak se z lesa ozývá.“
„Na hrubý pytel hrubá záplata.“
„Akce – reakce“

S tím vším se setkáváme, jsme zvyklí, že za více zboží zaplatíme více peněz i že někdy při překročení určitého množství máme množstevní slevu. Různé závislosti hodnot na sobě, proměnné řady nás provázejí celý život. Matematika se snaží najít mezi závisle proměnnými matematické vztahy. Této části se říká funkční analýza.

I to jsou řady proměnných a závislosti





Z

Abychom se lépe domluvili, je vhodné pojmenovat, co v matematice budeme považovat za funkci a co ne.

Definice:

Funkce je zobrazení z množiny A reálných čísel do množiny B reálných čísel a to takové, že každému prvku z množiny A je přiřazen právě jeden prvek z množiny B.

Toto zobrazení můžeme zapisovat různě:

Pravidlo	Symbolické zápisy		Množina dvojic
Přičti číslo 4	x → x + 4	y = x + 4	[x; x + 4]
Vynásob číslo 2	x → 2 * x	y = 2 * x	[x; 2 * x]
Urči číslo převrácené	x → 1 / x	y = 1 / x	[x; 1/x]

Z

Definice funkce

Funkce je zobrazení z množiny A reálných čísel do množiny B reálných čísel a to takové, že každému prvku z množiny A je přiřazen právě jeden prvek z množiny B.

$$\forall x \in A \,\exists\, y \in B : f(x) = y$$

Zápisu y = f(x) říkáme ***funkční předpis***.
Proměnná ***x*** je ***nezávisle proměnná*** z množiny A, množině A říkáme ***definiční obor funkce*** (a značíme $\boldsymbol{D_f}$).
Proměnná ***y*** je ***závisle proměnná*** z množiny B (její hodnota závisí na konkrétním čísle x), množině B říkáme ***obor hodnot funkce*** (a značíme $\boldsymbol{H_f}$).

Z

Zápis funkce

- Funkci můžeme zapsat několika způsoby
  - funkčním předpisem y=f(x), kde f(x) je matematický výraz obsahující neznámou x
  - výčtem hodnot, což je množina uspořádaných dvojic, kde první číslo z uspořádané dvojice je z definičního oboru a druhé číslo z oboru hodnot $\{[a_1;b_1];[a_2;b_2];[a_3;b_3]...\}$
  - tabulkou, což je jiná forma výčtu hodnot
  - grafem, což je znázornění uspořádaných dvojic v soustavě souřadnic

Příklady

Rozhodněte, který z předpisů je funkce a který ne:

(v následujících příkladech je x libovolné reálné číslo, není-li řečeno jinak)

a) y = 3 Ano, je. Každému číslu x je přiřazeno číslo 3

b) {[-5; 3]; [0; 4,5]; [1; 6]; [2,3; 3] } Ano, je. Každému číslu x je přiřazeno jiné číslo

c) x = 3 * y Ano, pokud upravíme na y = x / 3.

d) y = q Ne. Podle zápisu není jasné, zda je q číslo nebo znak.

e) y = 0,5 * x Ano, je. Každému číslu x je přiřazeno číslo 0,5*x

f) {[-5; 3]; [2,3; 4,5]; [1; 6]; [2,3; 3] }

Ne. Číslu 2,3 jsou přiřazena dvě různá čísla!

Grafické znázornění funkce

Kromě předpisu se dá funkce znázornit tabulkou, kde jeden řádek představuje libovolné hodnoty z definičního oboru a druhý řádek vypočítané hodnoty podle funkčního předpisu. Pro příklad vezměme funkce z předcházejícího příkladu:

x	-5	-4	-3	0	1	2,3	6
a(x) = 3	3	3	3	3	3	3	3
b(x)	3			4,5	6	3	
c(x) = x / 3	-5/3	-4/3	-1	0	1/3	2,3/3	2
e(x) = 0,5 * x	-5/2	-2	-3/2	0	1/2	2,3/2	3

Grafické znázornění – soustava souřadnic

Abychom mohli znázornit funkční závislost graficky, je vhodné mít na to nějaký nástroj. Tím je soustava souřadnic, respektive dvě osy, na sebe kolmé, protínající se v bodě o souřadnicích [0; 0] a mající stejná měřítka. Takové soustavě říkáme **kartézská soustava souřadnic**. Pokud něco z toho nesplňuje, dá se v ní také zobrazovat, ale je to poněkud méně přehledné.

Z

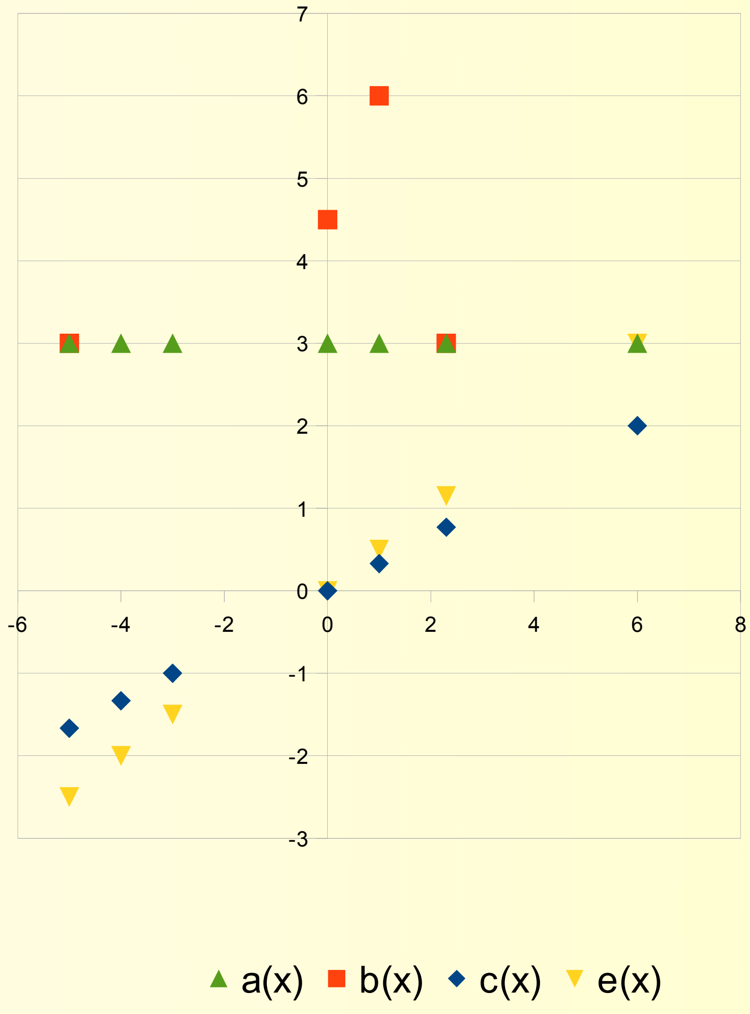
Grafické znázornění – soustava souřadnic

Vodorovné ose říkáme osa x a vynášíme na ní body z definičního oboru, svislé ose říkáme osa y a vynášíme na ní body z oboru hodnot.
Tam, kde se protínají kolmice na osy ze sobě si odpovídajících hodnot x a y dostáváme bod grafu.
Ten má vždy dvě souřadnice [x; y] nebo chcete-li [x; f(x)], kde x je z definičního oboru a f(x) je příslušná funkční hodnota z oboru hodnot.

Grafické znázornění funkce

- Tabulka hodnot

x	-5	-4	-3	0	1	2,3	6
a(x) = 3	3	3	3	3	3	3	3
b(x)	3			4,5	6	3	
c(x) = x/3	-5/3	-4/3	-1	0	1/3	2,3/3	2
e(x)=0,5*x	-5/2	-2	-3/2	0	1/2	2,3/2	3



- Někdy lze body proložit přímku, někdy křivku

Průsečíky grafu funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body. Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0].
Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y].

Z

A nyní se na některé funkce podíváme podrobněji.

Konstantní funkce

$\boldsymbol{y = k}$, kde k je libovolné reálné číslo

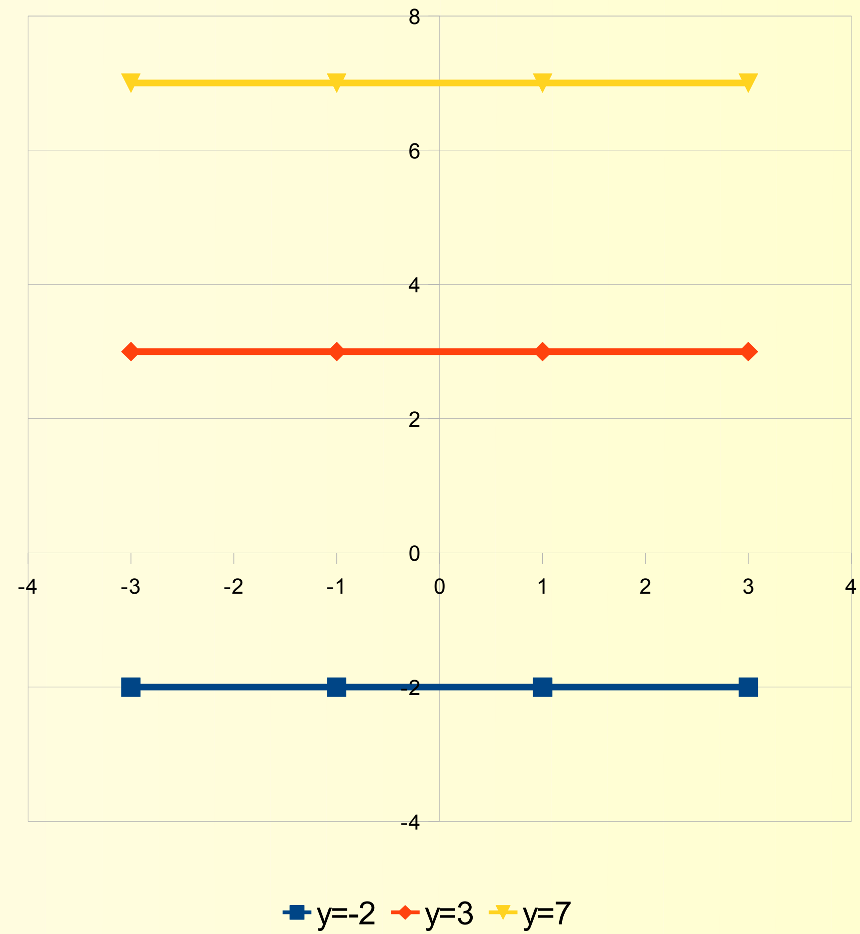
Definičním oborem této funkce může být celá množina reálných čísel (nebo její libovolná podmnožina), protože ať zvolím x jakékoliv, předpis přiřadí y jedno konkrétní reálné číslo k, které je samo oborem hodnot této funkce.

Z

Konstantní funkce

- Tabulka hodnot

x	-3	-1	1	3
f(x) = y1	-2	-2	-2	-2
g(x) = y2	3	3	3	3
h(x) = y3	7	7	7	7



- Grafem je přímka, rovnoběžná s osou x, kde y = k (podle funkčního předpisu)

Z

Lineární funkce

y* = *a* * *x* + *b , kde ***a*** je libovolné reálné číslo kromě nuly (protože pro a=0 se jedná o konstatní funkci) a ***b*** je libovolné reálné číslo

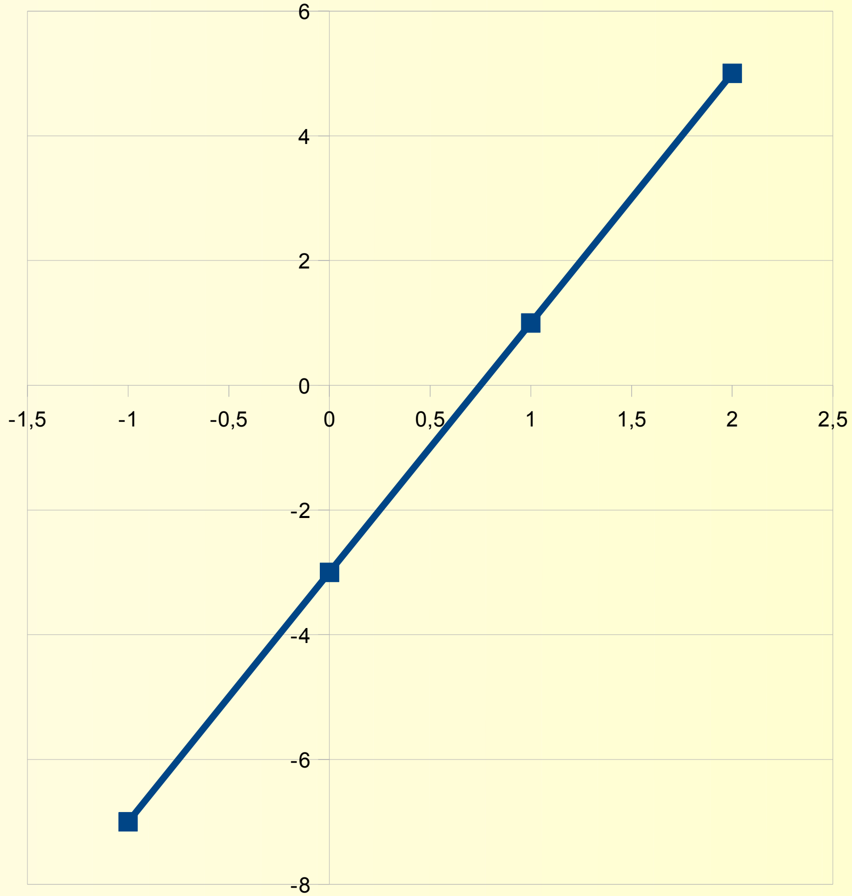
Definičním oborem této funkce může být celá množina reálných čísel (nebo její libovolná podmnožina), protože v předpisu mohu zvolit za x jakékoliv číslo a předpis přiřadí y jeho a-násobek zvětšený o číslo b. Oborem hodnot je množina reálných čísel (nebo její podmnožina v závislosti na definičním oboru).

Lineární funkce y = 4 * x - 3

- Tabulka hodnot

x	-1	0	1	2
f(x) = y1	-7	-3	1	5

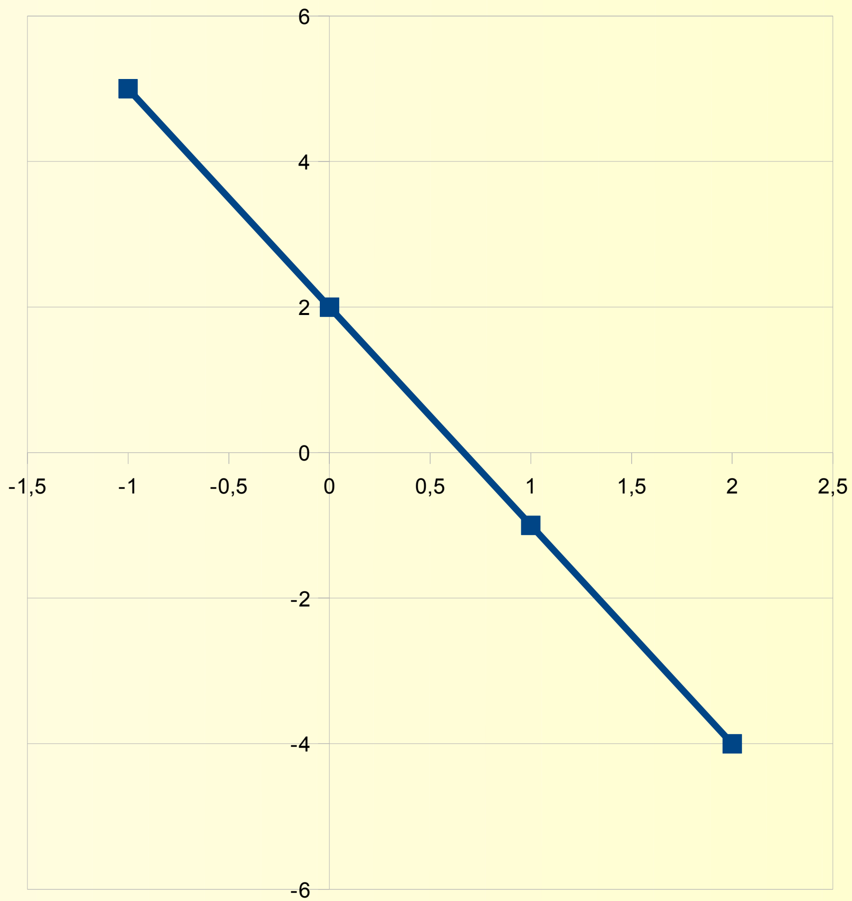
- Grafem je přímka



Lineární funkce y = -3 * x + 2

- Tabulka hodnot

x	-1	0	1	2
f(x) = y1	5	2	-1	-4



- Grafem je přímka

Vlastnosti lineárních funkcí

Vlastnosti lineárních funkcí, vliv parametrů ***a*** a ***b*** v předpisu y = a * x + b se dá nejlépe vyzkoušet na následujícím příkladu:

/home/vvotruba/Dokumenty/linfce.ods

Z

Vlastnosti lineárních funkcí

$$y = a * x + b$$

Shrnutí:

Parametr ***b*** má vliv na posun funkce na ose y, jeho hodnota přímo udává průsečík grafu funkce s osou y.

Parametr **a** má vliv na sklon grafu funkce, pro kladné ***a*** je ***y*** (funkční hodnota) se zvyšujícím se (rostoucím) ***x*** také zvyšující se (rostoucí) a pro záporné ***a*** je ***y*** se zvyšujícím se ***x*** zmenšující se (klesající).

Závěr:

Pro kladné a říkáme, že funkce je ***rostoucí***, a pro ***záporné a*** říkáme, že funkce je ***klesající***.

Z

Průsečíky grafu lineární funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body.
Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0],
v předpisu y = a * x + b bude y = 0, tedy 0 = a* x + b,
průsečík s osou x je X[-b/a; 0].
Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y],
v předpisu y = a * x + b bude x = 0, tedy y = b,
průsečík s osou y je Y[0; b].

Z

CENY VNITROSTÁTNÍCH POŠTOVNÍCH SLUŽEB

I. POŠTOVNÍ SLUŽBY

A. CENÍK ZÁKLADNÍCH SLUŽEB

1. Obyčejné psaní

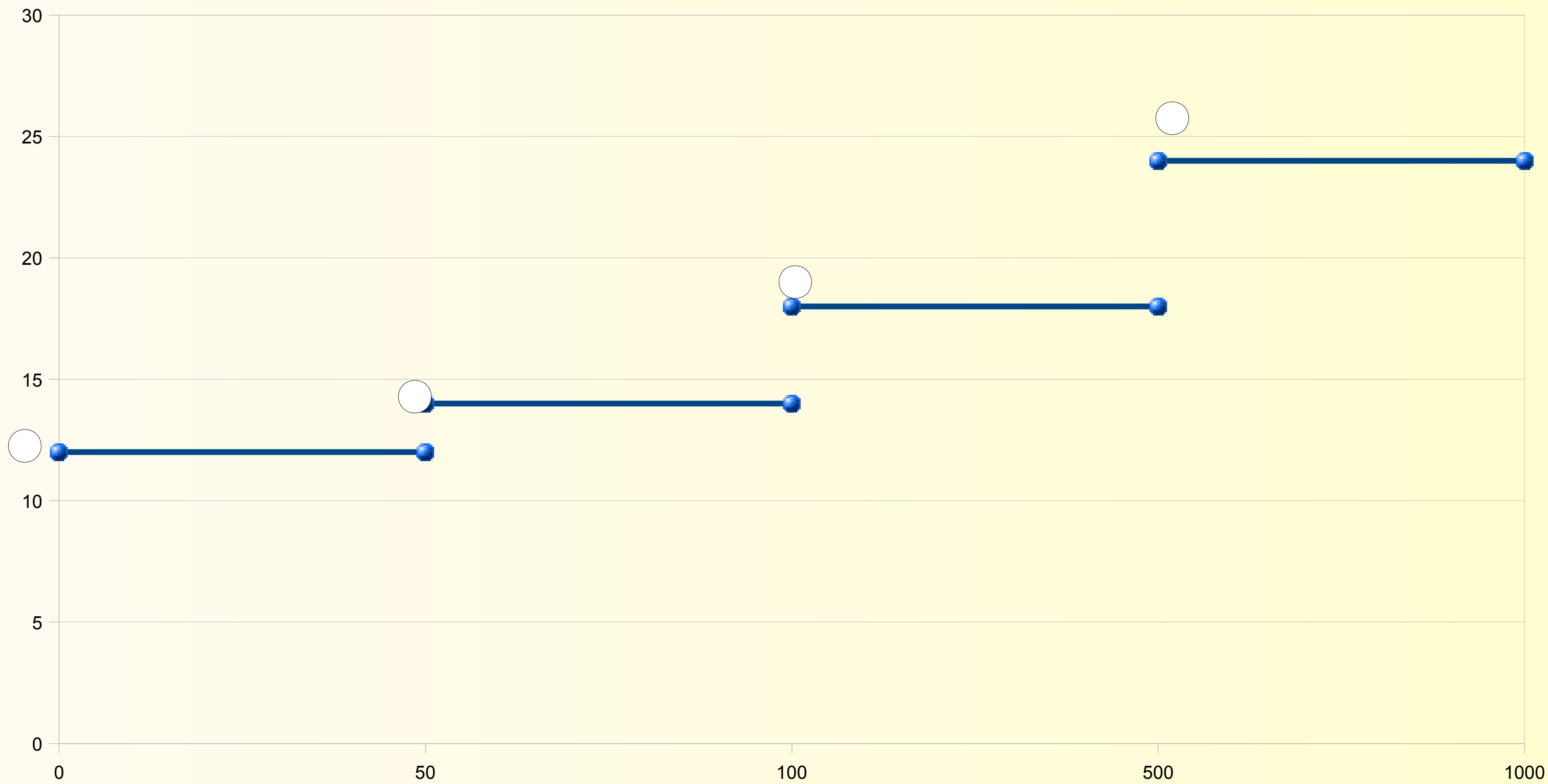
Druh zásilky	Do hmotnosti / cena v Kč			
	50 g	100 g	500 g	1 kg
Obyčejné psaní – standard[1] čl. 11 odst. 5 poštovních podmínek	10 Kč	-	-	-
Obyčejné psaní[2] čl. 11 poštovních podmínek	12 Kč	14 Kč	18 Kč	24 Kč

[1] Obálka nebo nesložený kartónový lístek, pravoúhlého tvaru, s rozměry max. 23,1 x 16,4 x 0,5 cm.
[2] Délka nesmí přesahovat 35,3 cm a šířka 25 cm, přičemž tloušťka nesmí být větší než 2 cm.

Kdybychom chtěli určit funkci ceny poštovného v závislosti na hmotnosti zásilky (za podmínky dodržení rozměrů obyčejného psaní), dostaneme:

y = 12, pro x od nuly (bez) do 50 g (včetně)
y = 14, pro x od 50 g (bez) do 100 g (včetně)
y = 18, pro x od 100 g (bez) do 500 g (včetně)
y = 24, pro x od 500 g (bez) do 1000 g (včetně)

Graf funkce ceny obyčejného psaní



POZOR: Levé krajní hodnoty jednotlivých úseček do grafu nepatří!

Kolik zaplatit za taxi?

Z

CENÍK SLUŽEB TAXI

Přistavení vozu k bytům a firmám prostřednictvím City Taxi se na celém území hl. města Prahy neúčtuje.

Sazba pro jízdy na území hl.m. Prahy a pro jízdy mimo Prahu, kdy se cíl cesty nenachází na území hl.m. Prahy:

Nástupní sazba	40,00Kč
1 kilometr	23,90Kč
1 minuta čekání	5,00Kč

Sazba pro jízdy mimo území hl.m. Prahy, kdy se cíl cesty nachází na území hl.m. Prahy:

Nástupní sazba	40,00Kč
1 kilometr	12,00Kč
1 minuta čekání	5,00Kč

Sazba Pro mikrobus (přeprava více než 4 osob) pro jízdy na území hl.m. Prahy a pro jízdy mimo Prahu, kdy se cíl cesty nenachází na území hl.m. Prahy:

Nástupní sazba	40,00Kč
1 kilometr	28,00Kč
1 minuta čekání	6,00Kč

Další možnosti tvorby cen dle konkrétní poptávky zákazníka - zašlete nám svou poptávku prostřednictvím dispečinku **257 257 257** nebo online.

Firemní sazby jsou uvedeny bez DPH 20%.

bez čekání

Praha – venkov

$y = 23{,}9 * x + 40$

Praha – Praha

$y = 12 * x + 40$

Praha – venkov (mikrobus)

$y = 28 * x + 40$

Kolik zaplatit za taxi?

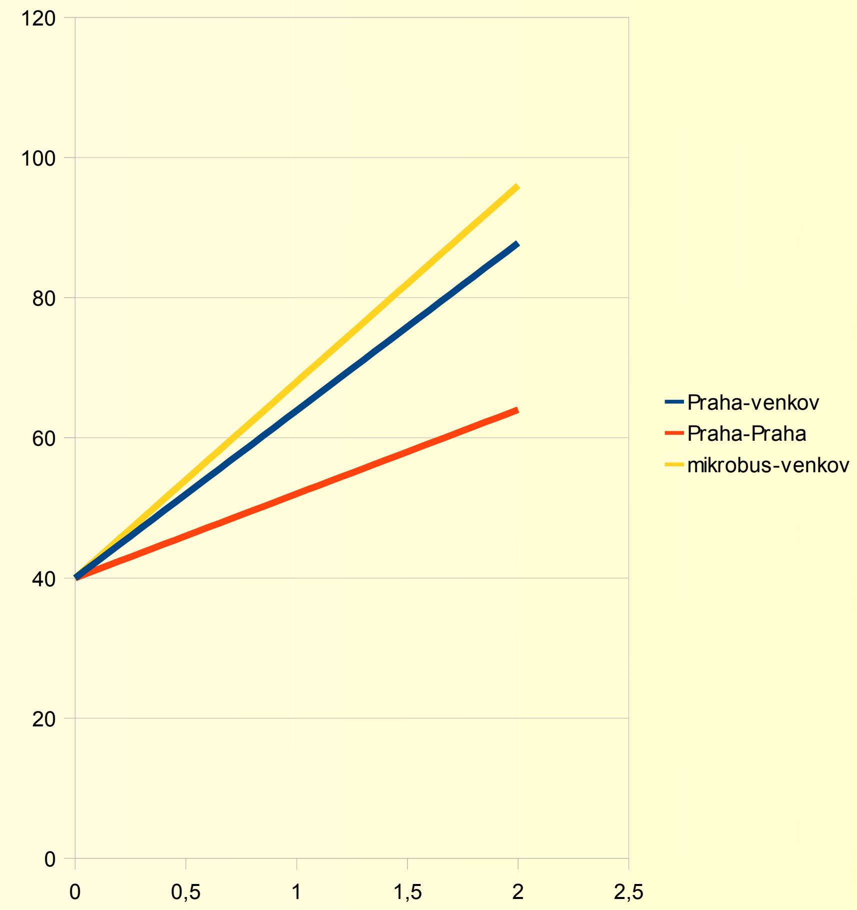
- Tabulka hodnot

Praha – venkov
$y = 23{,}9 * x + 40$

Praha – Praha
$y = 12 * x + 40$

Praha – venkov (mikrobus)
$y = 28 * x + 40$

x	0	1	2
pv(x)	40	63,9	87,8
pp(x)	40	52	64
pvm(x)	40	68	96



Zdroje:

Knihy

•Matematika a porozumění světu, František Kuřina a kolektiv, Academia, 2009

•Učebnice Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 2. část, Emil Calda, Oldřich Petránek, Jana Řepová, Prometheus, 1996

Webové stránky

•http://www.citytaxi.cz/cz/pricelist

•http://www.cpost.cz

•http://hm-ovoceazelenina.cz/article.php?articleid=46

•http://filmovehlasky.fdb.cz

Program

•Funkce - výukový program pro střední školy se sbírkou úloh (CD + příručka), RNDr. Lenka Volfová, Prometheus, 2009