Lineární nerovnice s neznámou ve jmenovateli

Zatímco u řešení rovnic stačilo stanovit podmínku smysluplnosti rovnice a vynásobit nejmenším společným násobkem jmenovatelů, u rovnic je to trochu složitější – je-li ve jmenovateli neznámá a násobíme-li výrazem s neznámou, není tento výraz vždy kladný, resp. bývá pro určitá čísla kladný a pro určitá záporný. Proto jej také musíme takto řešit.

Příklad 1

$\frac{2}{x-3}\geq 5$ Podmínka: $x\neq 3$, pokud bychom vynásobili nerovnici výrazem $x-3$, ten bude záporný pro $x<3$ (výraz je záporný => menší než nula => $x-3<0\Rightarrow x<3$). Pak se znaménko nerovnosti otočí a řešíme:

$$2\leq 5\cdot(x-3)$$
$$2\leq 5\cdot x-15 \quad \vdots +15$$
$$17\leq 5\cdot x \quad \vdots :5$$
$$\frac{17}{5}\leq x$$
$$3\frac{2}{5}\leq x$$

Řešili jsme pro $x<3$ a vyšlo nám $x\geq 3\frac{2}{5}$. Znamená to, že pro $x<3$ řešení neexistuje ($3\frac{2}{5}>3$).

pro $x>3$ (výraz je kladný => větší než nula => $x-3>0\Rightarrow x>3$). Pak se znaménko nerovnosti neotočí a tedy řešíme:

$$2\geq 5\cdot(x-3)$$
$$2\geq 5\cdot x-15 \quad \vdots +15$$
$$17\geq 5\cdot x \quad \vdots :5$$
$$\frac{17}{5}\geq x$$
$$3\frac{2}{5}\geq x$$

Řešili jsme pro $x>3$ a vyšlo nám $x\leq 3\frac{2}{5}$. Znamená to, že pro $x>3$ je řešení interval $\left(3\,;3\frac{2}{5}\right\rangle$.

Jiné řešení

Protože dobře umíme určovat intervaly, znaménko výrazu v intervalu, existuje i jiný, pro mnohé jednodušší, postup, jak řešit lineární nerovnice s neznámou ve jmenovateli.
Ukážeme si to na stejném zadání:

$$\frac{2}{x-3}\geq 5$$

Pro porovnání s nulou musíme převést číslo 5 na levou stranu a upravit levou stranu:

$$\frac{2}{x-3}-5\geq 0$$
$$\frac{2}{x-3}-\frac{5\cdot(x-3)}{x-3}\geq 0$$
$$\frac{2-5\cdot x+15}{x-3}\geq 0$$
$$\frac{17-5\cdot x}{x-3}\geq 0$$

Teď máme podíl dvou výrazů, který má být větší než nula. A to je právě tehdy, když jsou oba výrazy kladné nebo oba záporné.

1) nulové body

Abychom to mohli rozhodnout, určíme si nulové body (čísla, pro která je výraz roven nule):

$17-5\cdot x=0\Rightarrow x_0=\frac{17}{5}$ a $x-3=0\Rightarrow x_0=3$

2) intervaly

Nulové body rozdělí osu čísel na intervaly $(-\infty;3)\cup\left(3;\frac{17}{5}\right)\cup\left(\frac{17}{5};\infty\right)$. Co s čísly 3 a $\frac{17}{5}$? Výraz $x-3$ je ve jmenovateli zlomku a proto $x\neq 3$, do intervalů ji nepřidáme. Výraz $17-5\cdot x$ je v čitateli, celý zlomek se může rovnat nule (≥), takže číslo $\frac{17}{5}$ do intervalů přidáme, proto:

$(-\infty;3)\cup\left(3;\frac{17}{5}\right\rangle\cup\left\langle\frac{17}{5};\infty\right)$

3) tabulka

Teď si sestavíme tabulku:

výrazy	$(-\infty;3)$	$\left(3;\frac{17}{5}\right\rangle$	$\left\langle\frac{17}{5};\infty\right)$
$17-5\cdot x$	+	+	–
$x-3$	–	+	+

Jak poznáme, zda je výraz kladný nebo záporný?

a) dosazením čísla z intervalu (ne krajních bodů)

nebo

b) podle znamenka u x: u kladného x je nejdříve –, za nulovým bodem +; u záporného je nejdříve + a za nulovým bodem –

4) určení výsledku

Závěr: Podíl dvou kladných výrazů je kladný, podíl dvou záporných výrazů je kladný, podíl kladného a záporného výrazu je záporný. Proto k tabulce patří ještě řádka:

$\frac{17-5\cdot x}{x-3}$	–	+	–

Výraz na levé straně má být kladný, tedy větší než nula, a to je pouze v intervalu $\left(3;\frac{17}{5}\right\rangle$.

Příklady: *učebnice strana 52; sbírka strana 166*

1. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{6\cdot x-5}{4\cdot x+1}<0$ $\left(-\frac{1}{4};\frac{5}{6}\right)$
2. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{2\cdot x-3}{3\cdot x-7}<0$ $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right)$
3. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{3}{x-2}\leq 1$ $(-\infty;2)\cup\langle 5;\infty)$
4. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{x}{x-5}<\frac{1}{2}$ $(-5;5)$
5. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\frac{x+1}{3\cdot x-2}\leq 2$ $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\langle 1;\infty)$
6. V množině $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $(x-1)\cdot(3-x)\cdot(x-2)^2>0$ $(1;3)$