Lineární nerovnice s absolutní hodnotou

Připomeňme si:
Absolutní hodnota čísla je jeho vzdálenost od nuly. Je to kladné číslo definované tak, že
$\forall x \in set\ R: x>0 \Rightarrow |x|=x \wedge x<0 \Rightarrow |x|=-x \wedge x=0 \Rightarrow |x|=x$.

Příklad 1:

$|-5|=5$ $\quad |3-4\cdot 5|=|3-20|=|-17|=17$ $\quad |4\cdot(-7)-6\cdot(-8)|=|-28+48|=|20|=20$

Příklad 2:

$|x-3|$ se liší podle toho, zda je $x-3$ kladné (>0) nebo záporné (<0):
$x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow |x-3|=x-3$
$x-3<0 \Rightarrow x<3 \Rightarrow |x-3|=-(x-3)=-x+3$
pro $x=3$ je $|x-3|=0$

Příklad 3:

$|4-3\cdot x|$ se liší podle toho, zda je $4-3\cdot x$ kladné (>0) nebo záporné (<0):
$4-3\cdot x>0 \Rightarrow x<\frac{4}{3} \Rightarrow |4-3\cdot x|=4-3\cdot x$
$4-3\cdot x<0 \Rightarrow x>\frac{4}{3} \Rightarrow |4-3\cdot x|=4-3\cdot x$
pro $x=\frac{4}{3}$ je $|4-3\cdot x|=0$

Postup pro řešení lineárních rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou:

1. Určíme nulové body pro všechny absolutní hodnoty
2. Rozdělíme množinu, ve které nerovnici/rovnici řešíme, na intervaly podle nulových bodů
3. Do tabulky si napíšeme znaménka výrazů a hodnoty absolutních hodnot v těchto intervalech
4. Řešíme nerovnici/rovnici v jednotlivých intervalech
5. Porovnáme řešení s intervalem, ve kterém jsme řešili a zapíšeme výsledek jako průnik intervalu, ve kterém jsme řešili, a intervalu, který nám vyšel
6. Zapíšeme řešení jako sjednocení dílčích řešení

Příklad 4:

$|3\cdot x-5|-|5+3\cdot x| \geq 4\cdot x+|x|$

1. Nulové body: $3\cdot x-5=0 \Rightarrow x_0=\frac{5}{3} \wedge 5+3\cdot x=0 \Rightarrow x_0=\frac{-5}{3} \wedge x_0=0$
2. Množina reálných čísel se rozdělí na $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{-5}{3};0\right) \cup \left(0;\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3};\infty\right)$. Co s vlastními krajními body intervalů? V nich je vždy některý výraz (ten, pro který je daná hodnota nulovým bodem) nulový, takže tento bod můžeme přidat do všech intervalů:
$\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{-5}{3};0\right\rangle \cup \left\langle 0;\frac{5}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{5}{3};\infty\right)$
3. Tabulka:

	$\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right\rangle$	$\left\langle\frac{-5}{3};0\right\rangle$	$\left\langle 0;\frac{5}{3}\right\rangle$	$\left\langle\frac{5}{3};\infty\right)$
$\lvert 3\cdot x-5\rvert$	–; $-3\cdot x+5$	–; $-3\cdot x+5$	–; $-3\cdot x+5$	+; $3\cdot x-5$
$\lvert 5+3\cdot x\rvert$	–; $-5-3\cdot x$	+; $5+3\cdot x$	+; $5+3\cdot x$	+; $5+3\cdot x$

$\lvert x\rvert$	$-;\quad -x$	$-;\quad -x$	$+;\quad x$	$+;\quad x$

4. + 5.

$x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right\rangle$:
$$-3\cdot x+5+5+3\cdot x\geq 4\cdot x-x$$
$$10\geq 3\cdot x$$
$$\frac{10}{3}\geq x$$
platí pro všechna $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right\rangle$

$x\in\left\langle\frac{-5}{3};0\right\rangle$:
$$-3\cdot x+5-5-3\cdot x\geq 4\cdot x-x$$
$$-5\cdot x\geq 3\cdot x$$
$$0\geq 8\cdot x$$
$$0\geq x$$
platí pro všechna $x\in\left\langle\frac{-5}{3};0\right\rangle$

$x\in\left\langle 0;\frac{5}{3}\right\rangle$:
$$-3\cdot x+5-5-3\cdot x\geq 4\cdot x+x$$
$$-5\cdot x\geq 5\cdot x$$
$$0\geq 10\cdot x$$
$$0\geq x$$
platí jen pro $x=0$

$x\in\left\langle\frac{5}{3};\infty\right)$:
$$3\cdot x-5-5-3\cdot x\geq 4\cdot x+x$$
$$-10\geq 5\cdot x$$
$$-2\geq x$$
neplatí pro žádná $x\in\left\langle\frac{5}{3};\infty\right)$

6. $P=(-\infty;0\rangle$

příklad 5:

1. Řešte nerovnici $\lvert x-1\rvert\geq 5$
2. Řešte nerovnici $\lvert 7\cdot x-1\rvert\leq 3$
3. Řešte nerovnici $\lvert 5+4\cdot x\rvert<1$
4. Řešte nerovnici $x\leq\lvert x-1\rvert<5$
5. Řešte nerovnici $x-\lvert 1-2\cdot x\rvert<3$
6. Řešte nerovnici $\lvert x+1\rvert-3\cdot x>5$
7. Řešte rovnici $\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert=2$
8. Řešte rovnici $\lvert(x-3)\cdot(x-2)\rvert=0$
9. Řešte rovnici $\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert=2\cdot x+2$
10. Řešte rovnici $\lvert x+2\rvert-2\cdot\lvert 2\cdot x+4\rvert=\lvert 3\cdot x-1\rvert$

Výsledky:

1) $(-\infty;-4\rangle\cup\langle 6;\infty)$
2) $\left\langle\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right\rangle$
3) $\left(\frac{-3}{2};-1\right)$
4) $\left(-4;\frac{1}{2}\right\rangle$
5) $\mathbb{R}$
6) $\left(\frac{-3}{2};-1\right)$
7) $\emptyset$
8) $\{2;3\}$
9) $\{1\}$
10) $\emptyset$