Kvadratické rovnice

V zadání lineární rovnice se může vyskytovat neznámá ve vyšší než první mocnině. Vždy ale při úpravě tato neznámá ve vyšší než první mocnině zmizí, odečte se , protože se vyskytuje na obou stranách ve stejném násobku. Přesto se dá řešit řada rovnic, kde se neznámá vyskytuje v druhé mocnině.
Každá rovnice, která se dá upravit do tvaru $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ **, kdy** $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b, c\in\mathbb{R}$ **, se nazývá kvadratická.** Člen $a\cdot x^2$ se nazývá **kvadratický člen**, člen $b\cdot x$ **lineární člen** a člen c **absolutní člen**. Člen a se nazývá **kvadratický koeficient**, člen b se nazývá **lineární koeficient**.

Řešení kvadratických rovnic

Hledání řešení rovnice $x^2=4$ znamená hledání takových čísel, jejichž druhá mocnina je rovna 4. Druhá mocnina kladného čísla i záporného čísla je kladná, druhá mocnina opačných čísel je dokonce stejná ($(-2)^2=2^2=4$). Proto $x^2=4\Rightarrow|x|=2\Rightarrow x_1=2\wedge x_2=-2$. Všechny ostatní rovnice, obsahující nejvýše druhou mocninu, se dají řešit obdobně.
Jinak můžeme tu samou rovnici řešit pomocí vzorce: $x^2=4\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow(x-2)(x+2)=0$ Součin je roven nule, jsou-li součinitelé rovni nule (aspoň jeden). Proto $x-2=0\Rightarrow x_1=2\wedge x+2=0\Rightarrow x_2=-2$. Výsledek je stejný.
Ještě se často potkáme s rovnicí, kde se druhá mocnina čísla rovná zápornému číslu, např. $x^2=-25$. Tady je nutné si uvědomit, že zatímco druhá mocnina jakéhokoliv čísla je číslo kladné nebo nula, tak na druhé straně rovnice máme číslo záporné. Neřešitelný problém – žádné reálné číslo není zároveň kladné nebo nula a zároveň záporné. Proto mezi reálnými čísly tato rovnice řešení nemá!
Nejprve se podíváme na řešení neúplných kvadratických rovnic.

Kvadratická rovnice bez lineárního členu

Zkuste začít tím, že si vyřešíte sami pár příkladů. Pak se vraťte k tomuto obecnému postupu.
Taková rovnice se dá napsat ve tvaru $a\cdot x^2+c=0$, kde $a\neq 0$. Převedeme-li c na druhou stranu rovnice, dostaneme $a\cdot x^2=-c$. A převedeme-li a na druhou stranu, dostáváme $x^2=-\frac{c}{a}$. Jako mezivýsledek tu máme opačné (–) číslo k podílu dvou čísel c a a . Toto číslo ($-\frac{c}{a}$) musí být kladné nebo nula, má-li mít rovnice řešení, protože je rovno druhé mocnině neznámé x . Tedy číslo $\frac{c}{a}$ musí být záporné a tedy $(c>0\wedge a<0)\vee(c<0\wedge a>0)$, jinými slovy čísla a a c musí mít rozdílná znaménka. Není-li tomu tak, rovnice nemá žádné řešení. Je-li $c=0$ (rovnice je bez lineárního i absolutního členu), pak má jediné řešení $x=0$. A je-li $\frac{c}{a}<0$, pak $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Příklad 1:

Řešte rovnice:

a) $5\cdot x^2-125=0$ b) $-1{,}5\cdot x^2-6=0$ c) $4\cdot x^2=0$
d) $7\cdot x^2+28=0$ e) $-14\cdot x^2+3{,}5=0$ f) $(2\cdot x-3)^2+12\cdot x=0$

Řešení:

a) *pomalu*:
$$\begin{aligned}5\cdot x^2-125&=0\,|+125\\5\cdot x^2&=125\,|:5\\x^2&=25\\|x|&=5\\x&=\pm 5\\P&=\{-5;5\}\end{aligned}$$

rychle: $a=5, c=-125$ mají rozdílná znaménka; $x=\pm\sqrt{-\frac{-125}{5}}=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

b) *pomalu*:

$$\begin{aligned} -1{,}5\cdot x^2-6&=0\,|+6\\ -1{,}5\cdot x^2&=6\,|:(-1{,}5)\\ x^2&=-4\\ &\textit{nemá řešení}\\ P&=\{\} \end{aligned}$$

rychle: $a=-1{,}5\,,\,c=-6$ mají stejná znaménka; rovnice nemá řešení

c) *pomalu*:

$$\begin{aligned} 4\cdot x^2&=0\,|:4\\ x^2&=0\\ x&=0\\ P&=\{0\} \end{aligned}$$

rychle: $a=4,c=0$; protože $c=0$ rovnice má jediné řešení $x=0$

d) *pomalu*:

$$\begin{aligned} 7\cdot x^2+28&=0\,|-28\\ 7\cdot x^2&=-28\,|:7\\ x^2&=-4\\ &\textit{nemá řešení}\\ P&=\{\} \end{aligned}$$

rychle: $a=7,c=28$ mají stejná znaménka; rovnice nemá řešení

e) *pomalu*:

$$\begin{aligned} -14\cdot x^2+3{,}5&=0\,|-3{,}5\\ -14\cdot x^2&=-3{,}5\,|:(-14)\\ x^2&=0{,}25\\ x&=\pm 0{,}5\\ P&=\{-0{,}5\,;\,0{,}5\} \end{aligned}$$

rychle: $a=-14,c=3{,}5$ mají rozdílná znaménka; $x=\pm\sqrt{-\frac{3{,}5}{14}}=\pm\sqrt{0{,}25}=\pm 0{,}5$

f)

$$\begin{aligned} (2\cdot x-3)^2+12\cdot x&=0\\ 4\cdot x^2-12\cdot x+9+12\cdot x&=0\\ 4\cdot x^2+9&=0\,|-9\\ 4\cdot x^2&=-9\,|:4\\ x^2&=-\frac{9}{4}\\ &\textit{nemá řešení}\\ P&=\{\} \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Znovu zkuste začít tím, že si vyřešíte sami pár příkladů. Pak se vraťte k tomuto obecnému postupu.

Taková rovnice se dá napsat ve tvaru $a\cdot x^2+b\cdot x=0$, kde $a\neq 0$. Dá se vytknout x , takže dostaneme rovnici $x\cdot(a\cdot x+b)=0$. Součin dvou výrazů se rovná nule tehdy, když se aspoň jeden z výrazů rovná nule. Rovnice má jedno řešení $x=0$ a druhé řešení je řešením lineární rovnice $a\cdot x+b=0$, tedy $x=-\frac{b}{a}$.

Protože $a\neq 0$ má tento typ neúplné kvadratické rovnice vždy řešení a vždy dvě řešení, $P=\left\{0\,;-\frac{b}{a}\right\}$.

Příklad 2:

Řešte rovnice:

a) $5\cdot x^2-125\cdot x=0$ b) $-1{,}5\cdot x^2-6\cdot x=0$ c) $x^2-8\cdot x=0$

d) $7\cdot x^2+28\cdot x=0$ e) $-14\cdot x^2+15\cdot x=0$ f) $(2\cdot x-3)^2-9=0$

Řešení:

a) *pomalé:*

$$\begin{aligned} 5\cdot x^2-125\cdot x&=0\\ 5\cdot x\cdot(x-25)=0&\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=25 \end{aligned}$$

rychlé: $P=\left\{0\,;-\frac{-125}{5}\right\}=\{0\,;\,25\}$

b) *pomalé:*
$$-1{,}5\cdot x^2-6\cdot x=0$$
$$-1{,}5\cdot x\cdot(x+4)=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=-4$$

rychlé: $P=\left\{0;-\frac{-6}{-1{,}5}\right\}=\{0;-4\}$

c) *pomalé:*
$$x^2-8\cdot x=0$$
$$x\cdot(x-8)=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=8$$

rychlé: $P=\left\{0;-\frac{-8}{1}\right\}=\{0;8\}$

d) *pomalé:*
$$7\cdot x^2+28\cdot x=0$$
$$7\cdot x\cdot(x+4)=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=-4$$

rychlé: $P=\left\{0;-\frac{28}{7}\right\}=\{0;-4\}$

e) *pomalé:*
$$-14\cdot x^2+15\cdot x=0$$
$$x\cdot(-14\cdot x+15)=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=\frac{15}{14}$$

rychlé: $P=\left\{0;-\frac{15}{-14}\right\}=\left\{0;\frac{15}{14}\right\}$

f) *pomalé:*
$$(2\cdot x-3)^2-9=0$$
$$4\cdot x^2-12\cdot x+9-9=0$$
$$4\cdot x^2-12\cdot x=0$$
$$4\cdot x\cdot(x-3)=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=3$$

Snadno řešitelné úplné kvadratické rovnice

Některé rovnice, hlavně ty, které mají kvadratický koeficient rovný 1 a lineární koeficient sudý, se dají řešit s pomocí vzorců $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ či $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Ukážeme si nejdříve ty, které vedou na tvar $(a\cdot x+b)^2=0$, tedy druhá mocnina dvojčlenu rovná nule. Pak je výsledek $x=-\frac{b}{a}$.

Příklad 3:

a) $x^2-40\cdot x+400=0$ b) $x^2+14\cdot x+49=0$ c) $3\cdot x^2-18\cdot x+27=0$

Řešení:

a)
$$x^2-40\cdot x+400=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 20+20^2=0$$
$$(x-20)^2=0$$
$$x=20;P=\{20\}$$

b)
$$x^2+14\cdot x+49=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot 7+7^2=0$$
$$(x+7)^2=0$$
$$x=-7;P=\{-7\}$$

c)
$$3\cdot x^2-18\cdot x+27=0$$
$$3\cdot(x^2-6\cdot x+9)=0|:3$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$x=3;P=\{3\}$$

Řešení úplných kvadratických rovnic

Než si odvodíme vzorec, ukážeme si několik příkladů, jak by se kvadratická rovnice v úplném tvaru dala řešit.

Příklad 4:

a) $x^2-42\cdot x+15=0$ b) $-x^2+30\cdot x-15=0$ c) $3\cdot x^2-21\cdot x+147=0$

Řešení:

a)
$$x^2-42\cdot x+15=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 21+21^2-21^2+15=0|-15+21^2$$
$$(x-21)^2=456|\sqrt{\mathit{obě\ strany}}$$
$$x-21=\pm 2\cdot\sqrt{114}$$
$$x_1=21+2\cdot\sqrt{114}\wedge x_2=21-2\cdot\sqrt{114}$$
$$P=\{21\pm 2\cdot\sqrt{114}\}$$

b)
$$-x^2+30\cdot x-15=0$$
$$-(x^2-2\cdot x\cdot 15+15^2)+225-15=0|-225+15$$
$$-(x-15)^2=-210|:(-1)$$
$$(x-15)^2=210$$
$$x-15=\pm 210$$
$$x_1=15+210=225\wedge x_2=-95$$
$$P=\{-95;225\}$$

c)
$$3\cdot x^2-21\cdot x+147=0|:3$$
$$x^2-7\cdot x+49=0$$
$$x^2-\frac{2\cdot x\cdot 7}{2}+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+49=0$$
$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49\cdot 3}{4}=0|\frac{-147}{4}$$
$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{-147}{4}$$
$$\mathit{nemá\ řešení}$$
$$P=\emptyset$$

Tento postup je vždy použitelný, ale, jak je vidět, velmi často opakujeme úplně stejné kroky – doplnění na čtverec (vzorec $(a\pm b)^2=a^2\pm 2\cdot a\cdot b+b^2$), pak převedeme čísla na pravou stranu, odmocníme (je-li na pravé straně kladné číslo) a převedeme číslo z levé strany na druhou. Jak by to vypadalo pro obecný tvar kvadratické rovnice?

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0|:a$$
$$x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2\cdot a}+\left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\frac{c}{a}=0|+\left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{c}{a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2=\frac{b^2}{4\cdot a^2}-\frac{c}{a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2=\frac{b^2}{4\cdot a^2}-\frac{4\cdot a\cdot c}{4\cdot a^2}$$
$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2=\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a^2}$$
$$x+\frac{b}{2\cdot a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a^2}}$$
$$x+\frac{b}{2\cdot a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}|\frac{-b}{2\cdot a}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Vztah, ke kterému jsme došli za použití povolených úprav při řešení rovnice s výjimkou odmocňování by se dal použít univerzálně. Tedy vzorec by mohl pomoci k řešení kvadratických rovnic, kde ostatní řešení jsou obtížnější a zdlouhavá.

Zbývá se podívat na odmocnění. Není problém se jmenovatelem – $4\cdot a^2$ je kladné a nenulové číslo, znaménko a nehraje žádnou roli ani v a^2, ani po odmocnění, protože před celou odmocninou je ±, proto můžeme psát a. Co s čitatelem $b^2-4\cdot a\cdot c$? Je to matematický výraz, který může nabývat, podle čísel, hodnot kladných, záporných nebo nuly. Protože má větší význam, označíme ho pojmem **diskriminant**, $D=b^2-4\cdot a\cdot c$. Je-li $D>0$, můžeme jej odmocnit a dostaneme **dvě různá řešení, dva kořeny kvadratické rovnice**; je-li $D=0$, jeho odmocnina je také 0 a dostaneme jeden kořen, kterému říkáme dvojnásobný kořen. A je-li D<0, odmocnit nemůžeme, protože to pro reálná čísla není povolené. Pak tedy v oboru reálných čísel kvadratická rovnice řešení nemá. Možná, až připustíme odmocninu ze záporného čísla, se dostaneme dál, ale už to nebudou reálná čísla (ale *imaginární*).

Vzorec pro řešení kvadratické rovnice $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a}\wedge D=b^2-4\cdot a\cdot c$

Příklad 5:

Vyřešte kvadratickou rovnici:

a) $x^2-15\cdot x+36=0$ b) $25\cdot y^2-225\cdot x-900=0$ c) $x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+1=0$

Řešení:

a)
$$a=1\,;b=-15\,;c=36$$
$$D=225-4\cdot 36=225-144=81$$

$D>0$, takže rovnice bude mít dvě řešení

$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{81}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{15+9}{2}=\frac{24}{2}=12\wedge x_2=\frac{15-9}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$P=\{3\,;12\}$

b)
$$25\cdot x^2-225\cdot x-900=0|:25$$
$$x^2-9\cdot x-36=0$$
$$a=1\,;b=-9\,;c=-36$$
$$D=81-4\cdot(-36)=81+4\cdot 36=225$$

$D>0$, takže rovnice bude mít dvě řešení

$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{225}}{2}\Rightarrow x_1=12\wedge x_2=-3$

$P=\{-3;12\}$

c) $a=1;b=-2\cdot\sqrt{2};c=1$

$D=8-4=4$

$D>0$, takže rovnice bude mít dvě řešení

$x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{2}\pm2}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}+1\wedge x_2=\sqrt{2}-1$

$P=\{\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1\}$