Kvadratické nerovnice

Z kvadratickou nerovnici považujeme každou nerovnici, kterou lze upravit do tvaru nerovnice $a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ nebo $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$ nebo $a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$ nebo $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$.

Kvadratický trojčlen na levé straně si můžeme představit jako předpis kvadratické funkce a úloha se tak mění na – doufejme, že jednodušší – úlohu určení hodnot kvadratické funkce. Jinými slovy, určení těch hodnot x, pro která jsou hodnoty y větší, větší nebo rovna, menší, menší nebo rovna 0, tedy kladná, nezáporná, záporná a nekladná. Což, převedeno do „řeči grafů", znamená najít ta x, pro která je graf funkce nad osou x!

Příklad 1:

Určete všechna x, pro která platí $-2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6 \geq 0$.

Řešení:

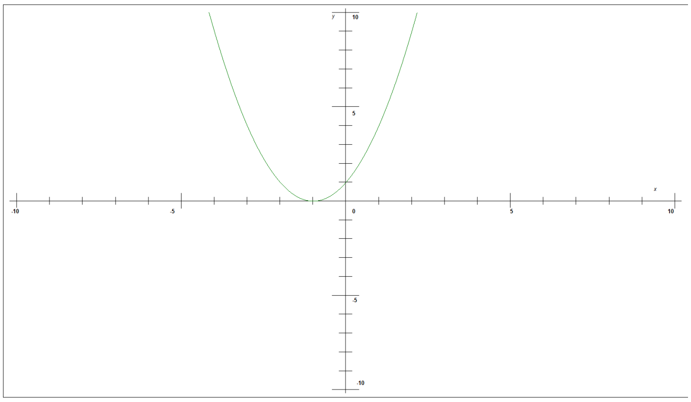
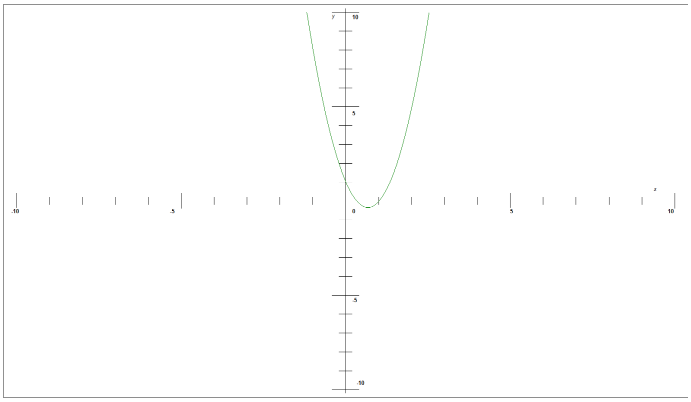
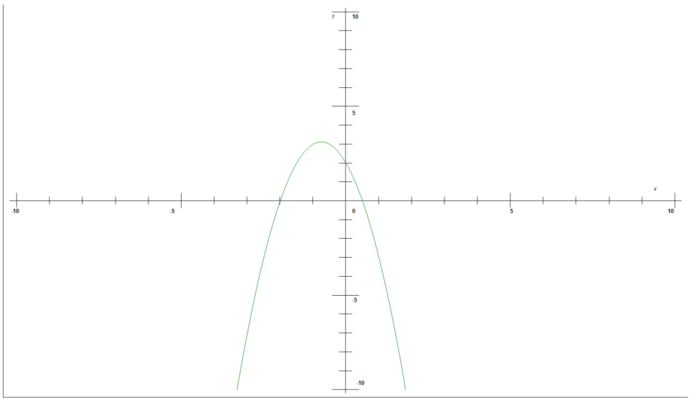
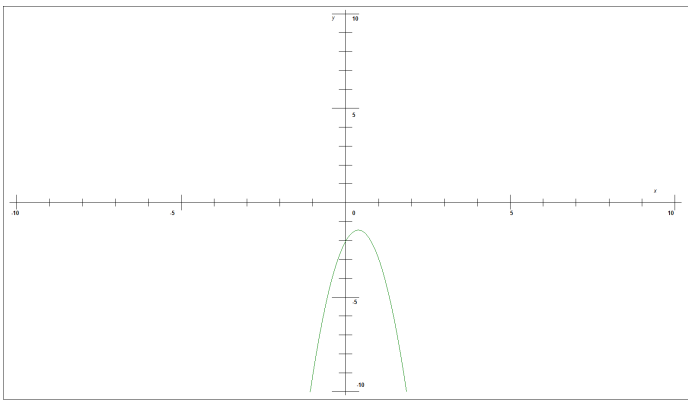
U x^2 je koeficient $a = -2$, záporný. Proto vrchol je nejvyšším bodem grafu, který je otevřen směrem dolů. Náčrtek:

Vrchol má souřadnice $x = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-5}{2 \cdot (-2)} = -\frac{5}{4}$. Druhou souřadnici mohu spočítat vzorcem nebo dosadit do předpisu funkce, vyjde $y = 15\frac{3}{8}$.

Abychom dokázali určit, pro která x jsou hodnoty kladné nebo nula, musíme určit průsečíky s osou x, tedy řešení rovnice $-2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$. Kořeny jsou $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{-4}$. Kdyby rovnice neměla řešení, pak to znamená, že nemá průsečík s osou x, tedy osu x neprotíná a všechny hodnoty y jsou buď záporné ($a < 0$) nebo kladné ($a > 0$). Kdyby rovnice měla jediné řešení, pak to znamená, že má průsečík jen v jednom bodě a všechny hodnoty jsou buď nekladné ($a \leq 0$) nebo nezáporné ($a \geq 0$).

V tomto případě průsečíky existují, graf je otevřený směrem dolů, hledáme ta x, pro která je $y \geq 0$. To jsou ta mezi průsečíky s osou x. Je potřeba dát pozor na znamínka: $x_1 = \frac{5 - \sqrt{73}}{-4}$, $x_2 = \frac{5 + \sqrt{73}}{-4}$. Které z těchto čísel je menší? Pro x_1 je jmenovatel záporný a čitatel také záporný => číslo je tedy kladné. Pro x_2 je jmenovatel záporný a čitatel kladný => číslo je tedy záporné. Proto řešením je interval:

$$P = \left\langle \frac{5 + \sqrt{73}}{-4}; \frac{5 - \sqrt{73}}{-4} \right\rangle .$$

	nerovnice $x^2+2\cdot x+1\geq 0$ graf (viz vlevo) má vrchol [-1; 0] (viz předchozí látka), je otevřen směrem nahoru => všechny hodnoty y jsou větší nebo rovny hodnotě vrcholu (minima), tedy větší nebo rovny 0. Bez ohledu na x jsou větší nebo rovny 0, tedy $P=\mathbb{R}$
	nerovnice $3\cdot x^2-4\cdot x+1<0$ graf (viz vlevo) má vrchol pod osou x $\left[\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$ (viz předchozí látka), je otevřen směrem nahoru => některé hodnoty jsou větší než nula, některé menší než nula. Na rozmezí jsou ta x, pro která je y=0, tedy hledám kořeny rovnice $3\cdot x^2-4\cdot x+1=0$. Kořeny jsou $x_1=1\wedge x_2=\frac{1}{3}$. Hodnoty menší než nula, záporné, jsou pod osou x, tedy pro x mezi kořeny: $P=\left(\frac{1}{3};1\right)$
	nerovnice $-2\cdot x^2-3\cdot x+2\leq 0$ graf (viz vlevo) má vrchol nad osou x $\left[-\frac{3}{4};\frac{25}{8}\right]$ (viz předchozí látka), je otevřen směrem dolů => některé hodnoty jsou menší a některé větší než nula. Na rozmezí je 0, tedy ta x, pro která je y=0, tedy kořeny rovnice $-2\cdot x^2-3\cdot x+2=0$. Kořeny jsou $x_1=-2\wedge x_2=\frac{1}{2}$. Hodnoty jsou menší nebo rovny nule, tedy pro $x\leq -2\vee x\geq\frac{1}{2}$ $P=(-\infty;-2\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$
	nerovnice $-4\cdot x^2+3\cdot x-2>0$ graf (viz vlevo) má vrchol dole $\left[\frac{3}{8};-\frac{23}{16}\right]$ (viz předchozí látka), je otevřen směrem dolů. Protože největší hodnota y je záporná, nebude nikdy nabývat kladných hodnot, tedy nikdy nebude větší než nula: $P=\emptyset$