Kvadratická funkce

Zopakujme si pojmy z loňského roku:

Definice funkce:

*Funkce je zobrazení z množiny A reálných čísel do množiny B reálných čísel a to takové, že každému prvku z množiny A je přiřazen **právě jeden** prvek z množiny B.*
Zápisu y = f(x) říkáme funkční předpis.
Proměnná x je nezávisle proměnná z množiny A, množině A říkáme **definiční obor funkce** (a značíme **Df**).
Proměnná y je závisle proměnná z množiny B (její hodnota závisí na konkrétním čísle x), množině B říkáme **obor hodnot funkce** (a značíme **Hf**).

Grafické znázornění funkce

Kromě předpisu se dá funkce znázornit tabulkou, kde jeden řádek představuje libovolné hodnoty z definičního oboru a druhý řádek vypočítané hodnoty podle funkčního předpisu.

Kartézská soustava souřadnic

Abychom se dorozuměli, používáme takovou soustavu souřadnic, která splňuje několik kritérií:

1. přímky, kterým říkáme **osy**, jsou na sebe kolmé – *vodorovnou* označujeme *x*, *svislou y*;protínají se v **počátku soustavy souřadnic**, ten označujeme O
2. mají stejné měřítko, jednotky stejné délky
3. počátkem je každá osa rozdělena na dvě polopřímky, jedním směrem (doprava nebo nahoru) kladnou, počínaje nulou, druhým směrem (doleva nebo dolů) zápornou, počínaje nulou

Vynesení konkrétního bodu odpovídajícího funkci znamená najít jeho obraz na ose x, jeho obraz na ose y a průsečík rovnoběžek s těmito osami procházejícími těmito obrazy.

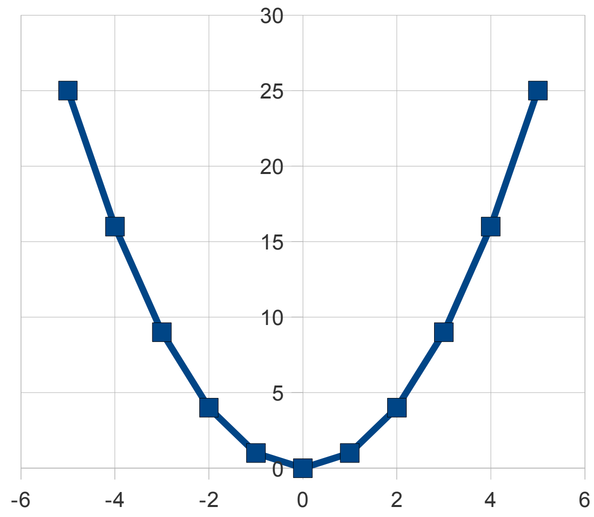
Průsečíky grafu funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body. Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0].Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y].
A nyní se na některé funkce podíváme podrobněji.

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je funkce daná předpisem $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.
Jejím definičním oborem je $\mathbb{R}$, protože za nezávisle proměnnou x mohu dosadit jakékoliv reálné číslo.
Její obor hodnot je omezený, protože umocněním x nedostaneme jakékoliv reálné číslo, ale pouze reálné číslo nezáporné – k oboru hodnot se proto ještě vrátíme.
Její průsečíky s osami jsou body, kdy se $x=0$, tedy $y=c$ nebo kdy se $y=0$, tedy kořeny rovnice $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Tato rovnice ale řešení mít nemusí, proto ani průsečíky s osou x nemusí existovat.
Závěr: Průsečík s osou y $Y[0;c]$; průsečík s osou x, existuje-li, je $X_1[x_1;0];X_2[x_2;0]$.
Podívejme se na graf základní funkce $y=x^2$, případně co s ním dělají parametry a,b,c .

x	y
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

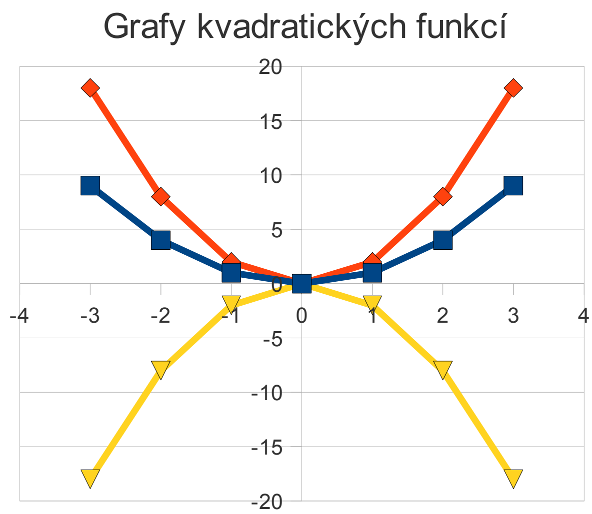


Z grafu je vidět, že funkce $y=x^2$ je pro záporné x klesající a po kladné x rostoucí, pro $x=0$ má ze všech hodnot y tu nejmenší hodnotu, tedy minimum a směrem nahoru je otevřená.

Změny grafu podle $y=p\cdot x^2$

Kdybychom všechny hodnoty $y=x^2$ vynásobili kladným číslem ($y=p\cdot x^2, p>0$), zvětší se hodnoty p-krát. Kdybychom všechny hodnoty $y=x^2$ vynásobili záporným číslem ($y=p\cdot x^2, p<0$), zvětší se hodnoty p-krát, ale na opačnou stranu osy y.

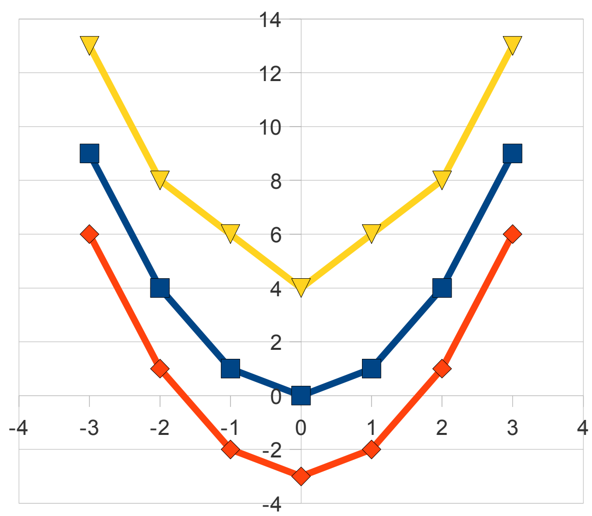
x	$y=x^2$	$y=2\cdot x^2$	$y=-2\cdot x^2$
-3	9	18	-18
-2	4	8	-8
-1	1	2	-2
0	0	0	0
1	1	2	-2
2	4	8	-8
3	9	18	-18



Změny grafu podle $y=x^2+p$

To by sice mělo být jednoduché, číslo p posouvá graf funkce nahoru nebo dolů (kladné p nahoru, záporné p dolů), ale raději si to zase ukážeme na tabulce a grafu. Prakticky jde o to, že každou hodnotu zvýšíme/snížíme o p: $y=f(x)$ změníme na $y=f(x)+p$

x	$y=x^2$	$y=x^2+4$	$y=x^2-3$
-3	9	13	6
-2	4	8	1
-1	1	6	-2
0	0	4	-3
1	1	6	-2
2	4	8	1

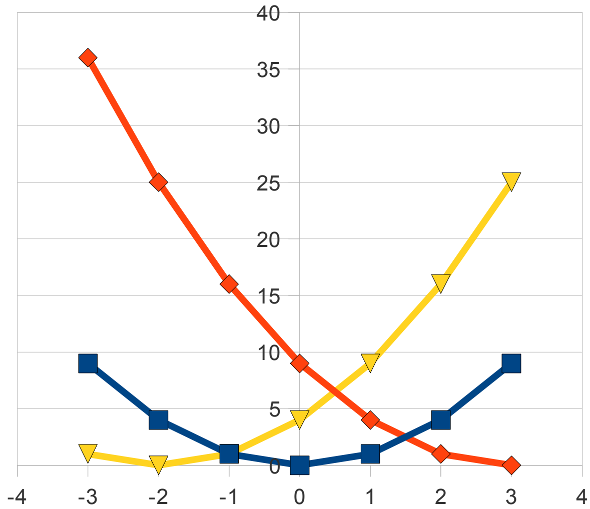


3	9	13	6

Změny grafu podle $y=(x-p)^2$

To už je trochu těžší. Každou hodnotu změníme: $y=f(x)$ na $y=f(x-p)$. Znamená to, že se hodnoty y pro x budou shodovat s hodnotami pro x odpovídající $x-p$. Zase si spočítáme tabulku a načrtneme graf.

x	$y=x^2$	$y=(x-3)^2$	$y=(x+2)^2$
-3	9	36	1
-2	4	25	0
-1	1	16	1
0	0	9	4
1	1	4	9
2	4	1	16
3	9	0	25



Z grafů je patrné, že se výchozí graf funkce $y=x^2$ posunul o p doprava (když je p kladné a odečítáme) a o p doleva (když je p kladné a přičítíme nebo, což je totéž, když je p záporné a odečítáme). Tento posun říká také, kam se posune minimum nebo maximum dané funkce.

Shrnutí

Grafem kvadratické funkce $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je křivka, které říkáme **parabola**. Je-li $a>0$, má **minimum** (je otevřená směrem nahoru), je-li $a<0$, má **maximum** (je otevřená směrem dolů). Extrém (minimum/maximum) zjistíme úpravou předpisu do tvaru $y=(x-m)^2+n$.

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

$$y=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x)+c$$

$$y=a\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2\cdot a}+\frac{b^2}{4\cdot a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4\cdot a}$$

$$y=a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\frac{(4\cdot a\cdot c-b^2)}{4\cdot a}$$

Hodnoty $m=-\frac{b}{2\cdot a}$ a $n=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$ jsou souřadnice extrému – $\left[-\frac{b}{2\cdot a};\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right]$.

Pokud je $a>0$, je obor hodnot $\left\langle\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a};\infty\right)$, pokud je $a<0$, je obor hodnot $\left(-\infty;\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right\rangle$

Funkce je pro $a>0$ klesající do extrému, od extrému rostoucí, pro $a<0$ je rostoucí do extrému, od extrému klesající.

Příklad 1:

Nakreslete graf kvadratické funkce a popište jej:

$f(x): y=x^2-6\cdot x+8$

Příklad 2:

Nakreslete graf kvadratické funkce a popište jej:

$g(x): y=x^2+5\cdot x-14$

Příklad 3:

Nakreslete graf kvadratické funkce a popište jej:

$h(x): y=2\cdot x^2-3\cdot x+4$

Řešení:

Příklad 1:

Definiční obor $D_f=\mathbb{R}$

Průsečíky s osami: $Y[0;8]; X_1[2;0]; X_2[4;0]$

Extrém: $V[3;-1]$

Obor hodnot $H_f=\langle -1;\infty)$

Funkce je pro $x<3$ klesající, pro $x>3$ rostoucí

Příklad 2:

Definiční obor $D_f=\mathbb{R}$

Průsečíky s osami: $Y[0;-14]; X_1[-7;0]; X_2[2;0]$

Extrém: $V\left[-\frac{5}{2};-\frac{81}{4}\right]$

Obor hodnot $H_f=\left\langle -\frac{81}{4};\infty\right)$

Funkce je pro $x<\frac{-5}{2}$ klesající, pro $x>\frac{-5}{2}$ rostoucí

Příklad 3:

Definiční obor $D_f=\mathbb{R}$

Průsečíky s osami: $Y[0;4]$; průsečíky s osou x nemá

Extrém: $V[-\frac{3}{2};13]$

Obor hodnot $H_f=\langle 13;\infty)$

Funkce je pro $x<-\frac{3}{2}$ klesající, pro $x>\frac{-3}{2}$ rostoucí