Kružnice

množina bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost

pojmy: bod na kružnici X [x, y]; poloměr kružnice r

pro střed S[0; 0]:

$$|SX| = r$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r$$
$$x^2+y^2=r^2$$

pro střed S[m; n]:

$$|SX| = r$$
$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2} = r$$
$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

obecná rovnice kružnice $a\cdot x^2+b\cdot y^2+c\cdot x+d\cdot y+e=0$

1. Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem A[-3;2].

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (-3)^2+y^2=r^2 \Rightarrow 9+4=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=13; r=\sqrt{13}$$

2. Rozhodněte o vzájemné poloze bodů A[4;3], B[1;1], C[2;0] a kuržnice dané rovnicí $x^2+y^2=4$

stačí dosadit souřadnice bodů do rovnice a ověřit rovnost, platí-li, bod leží na kružnici, jinak neleží

3. Napište středový i obecný tvar rovnice kuržnice se středem S[1;-2] a poloměrem r=3.
4. Napište rovnici kružnice, která má střed S[-3;5] a prochází bodem A[-7;8].
5. Rovnice $x^2+y^2+8x-10y-75=0$ je rovnicí kružnice k. Upravte ji na středový tvar; zjistěte poloměr a souřadnice středu kružnice.

$$x^2+8\cdot x+y^2-10\cdot y=75 \Rightarrow x^2+8\cdot x+16+y^2-10\cdot y+25=75+16+25$$
$$(x+4)^2+(y-5)^2=116 \Rightarrow S[-4;5]; r=\sqrt{116}$$

6. Upravte rovnici $x^2+y^2-2x+4y+7=0$ na středový tvar rovnice kružnice.
7. *Napište rovnici kružnice k, která prochází body A[5;1], B[0;6], C[4;-2].

vyjdeme ze středové rovnice

$$(5-m)^2+(1-n)^2=r^2 \wedge (0-m)^2+(6-n)^2=r^2 \wedge (4-m)^2+(-2-n)^2=r^2$$

a soustavu tří rovnic o třech neznámých upravíme, např. tím, že m^2 a n^2 převedeme na druhou stranu; dvě a dvě rovnice, třeba 1. a 2. a 1. a 3. od sebe odečteme a dostaneme tak dvě lineární rovnice o dvou neznámých m a n, které snadno vyřešíme, zde m = 0, n = 1 a r = 5

8. Napište středový i obecný tvar rovnice kružnice, je-li dáno:

   a) S[7;-3], r=6 — dosadit do vzorce

   b) A[3;5], B[-1;-3], kde A, B jsou krajní body průměru kružnice — co zkusit střed úsečky?

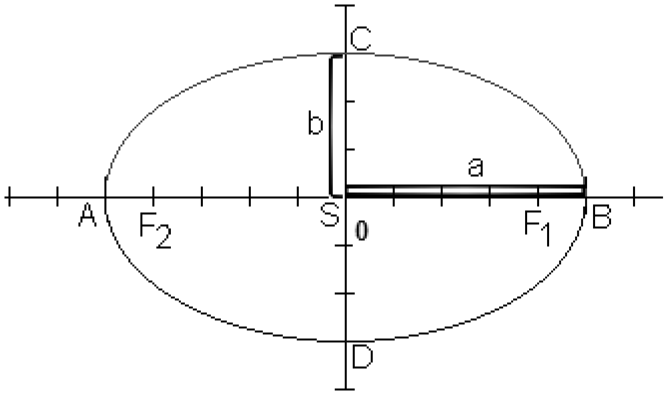
   c) S[5;-5], M[6;-1], kde M je bod na obvodu kružnice — dosadit do vzorce

9. Upravením rovnic na středový tvar rovnice kružnice zjistěte, které z nich jsou rovnicemi kružnice:

   a) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$ b) $x^2+y^2+2x=0$ c) $x^2+y^2-4y+8=0$

10. Rozhodněte o vzájemné poloze bodů A[-3;0], B[0;5], C[4;2], D[2;7], E[-2;3] a kružnice $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.
11. Body A[6;y_A], B[-8; y_B], C[2; y_{AC}] leží na kružnici o rovnici $x^2+y^2=100$. Zjistěte souřadnice y_A, y_B, y_C.

Elipsa



množina bodů, které mají od ohnisek stejný součet vzdálenosti

pojmy: **bod na elipse** $X[x;y]$;

ohniska $F_1[e;0];F_2[-e;0]$, je-li hlavní osa totožná s osou x a vedlejší osa totožná s osou y; vzdálenost bodu od ohnisek (součet jednotlivých vzdáleností) se označuje $\mathbf{2 \cdot a}$

$$|F_1X|=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$
$$|F_2X|=\sqrt{(x+e)^2+y^2}$$
$$|F_1X|+|F_2X|=2\cdot a$$
$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2\cdot a$$
$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2\cdot a-\sqrt{(x+e)^2+y^2}$$
$$(x-e)^2+y^2=4\cdot a^2-4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}+(x+e)^2+y^2$$
$$x^2-2\cdot x\cdot e+e^2+y^2=4\cdot a^2-4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}+x^2+2\cdot x\cdot e+e^2+y^2$$
$$-2\cdot x\cdot e=4\cdot a^2-4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}+2\cdot x\cdot e$$
$$4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}=4\cdot a^2+4\cdot x\cdot e$$
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=a+\frac{x\cdot e}{a}$$
$$(x+e)^2+y^2=a^2+\frac{2\cdot a\cdot x\cdot e}{a}+\frac{x^2\cdot e^2}{a^2}$$
$$x^2+2\cdot x\cdot e+e^2+y^2=a^2+2\cdot x\cdot e+\frac{x^2\cdot e^2}{a^2}$$
$$x^2-\frac{x^2\cdot e^2}{a^2}+y^2=a^2-e^2$$
$$\frac{x^2\cdot(a^2-e^2)}{a^2}+y^2=a^2-e^2 \quad Uvědomte\ si,\ že\ b^2=a^2-e^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a\ bude-li\ střed\ umístěn\ v\ bodě\ S[m;n]:\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

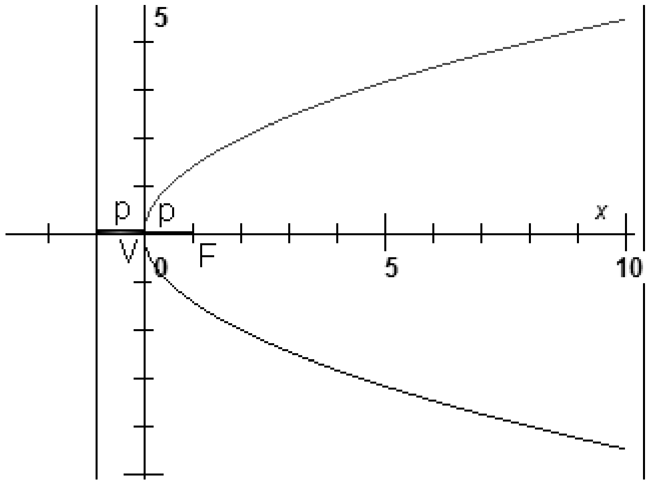
Na doplnění: $a=|AS|=|BS|\ \ hlavní\ \ poloosa;\ a=|AC|=|BC|=|AD|=|BD|$
$b=|CS|=|DS|\ \ vedlejší\ \ poloosa$
$e=|F_1S|=|F_2S|\ \ excentricita\ \ nebo-li\ \ výstřednost;\ e^2=a^2-b^2$

bude-li hlavní osa rovnoběžná s osou y, pak se větší číslo nebude vyskytovat pod x, ale pod y
Odvozená rovnice se nazývá osová rovnice

Kromě ní se ještě počítá s obecnou rovnicí:
$a\cdot x^2+b\cdot y^2+c\cdot x+d\cdot y+d=0, a>0, b>0$, POZOR: a, b zde není hlavní nebo vedlejší poloosa; dá se upravit – stejně jako v případě kružnice – do osového tvaru

Příklady:
1) Napište rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic, je-li a) a=4, b=3; b) a+b=9, c=3
2) Zjistěte délky poloos elipsy a výstřednost elipsy dané rovnicí a) $9x^2+25y^2=225$; b) $x^2+4y^2=100$
3) Napište rovnici elipsy se středem v bodě S[3;2], je-li a) a=5, b=3; b) b=4, e=5
4) Zjistěte souřadnice středu a ohnisek elipsy a délky poloos elipsy dané rovnicí
$9(x+2)^2+16(y-1)^2=144$

Parabola



množina bodů, které mají od řídící přímky a ohniska stejnou vzdálenost

pojmy: **bod na parabole** $X[x;y]$; **ohnisko** $F\left[\frac{p}{2};0\right]$,

je-li hlavní osa totožná s osou x; **d:** $x=-\frac{p}{2}$ – **řídící přímka**

vzdálenost libovoleného bodu od ohniska a řídící přímky je stejná a označuje se **p/2; p je vzdálenost ohniska od řídící přímky, parametr paraboly**

$$|FX|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$d: x=\frac{-p}{2}\Rightarrow 1\cdot x+0\cdot y+\frac{p}{2}=0\Rightarrow 2\cdot x+p=0$$

$$v(F,d)=\frac{|2\cdot x+p|}{\sqrt{2^2+0^2}}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{|2\cdot x+p|}{\sqrt{2^2+0^2}}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{|2\cdot x+p|}{2}$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}\cdot(x+p)^2$$

$$x^2-p\cdot x+\frac{p^2}{4}+y^2=\frac{1}{4}\cdot(4\cdot x^2+4\cdot x\cdot p+p^2)$$

$$x^2-p\cdot x+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+x\cdot p+\frac{p^2}{4}$$

$$y^2=2\cdot p\cdot x$$

Na doplnění: je-li p>0, pak je ohnisko vpravo a řídící přímka vlevo; obráceně je-li p<0, pak je ohnisko vlevo a řídící přímka vpravo

Je-li vrchol paraboly V (bod nacházející se přesně mezi ohniskem a řídící přímkou paraboly) umístěn v [m;n], pak má rovnice tvar $(y-n)^2=2\cdot p\cdot(x-m)$

Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y, pak má rovnice paraboly tvar: $(x-m)^2=2\cdot p\cdot(y-n)$

Příklady:

1) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřednic a prochází bodem A[3;9] a je souměrná podle osy x

2) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřednic a prochází bodem B[16;4] a je souměrná podle osy y

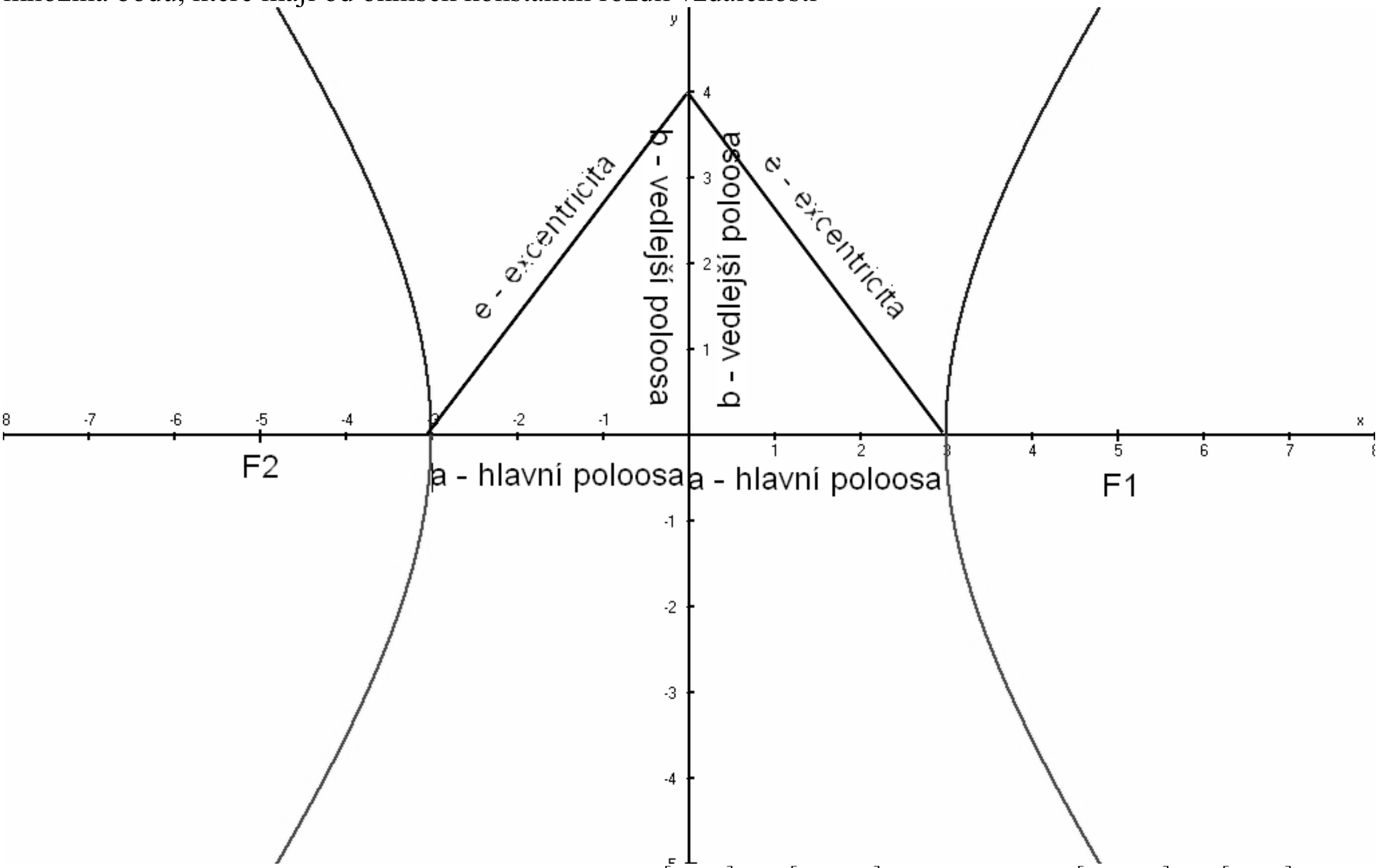
3) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřednic a prochází bodem D[-3;-5] a je souměrná podle osy y

4) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a prochází body a) A[8;3], B [8;-3] b) C[-5;2], D [-5;-2]; c) E[4;1], F [-4;1]

5) Napište rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřednic a ohniskem a) F[-2;0]; b) F[3;0]; c) F[0; 1/2]

Hyperbola

množina bodů, které mají od ohnisek konstantní rozdíl vzdálenosti



pojmy: **bod na hyperbole** $X[x;y]$; **ohniska** $F_1[e;0]; F_2[-e;0]$; vrcholy $V_1[-a;0], V_2[a;0]$ je-li hlavní osa totožná s osou x a vedlejší osa totožná s osou y; vzdálenost bodu od ohnisek (rozdíl jednotlivých vzdáleností) se označuje $\mathbf{2 \cdot a}$

$$|F_1X| = \sqrt{(x-e)^2+y^2}$$
$$|F_2X| = \sqrt{(x+e)^2+y^2}$$
$$|F_1X|-|F_2X| = 2\cdot a$$
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2\cdot a$$
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} = \sqrt{(x-e)^2+y^2}+2\cdot a$$
$$(x+e)^2+y^2 = \sqrt{(x-e)^2+y^2}+4\cdot a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}+4\cdot a^2$$
$$x^2+2\cdot x\cdot e+e^2+y^2 = x^2-2\cdot x\cdot e+e^2+y^2+4\cdot a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}+4\cdot a^2$$
$$4\cdot x\cdot e-4\cdot a^2 = 4\cdot a\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$
$$\frac{x\cdot e}{a}-a = \sqrt{(x-e)^2+y^2}$$
$$\frac{x^2\cdot e^2}{a^2}-2\cdot x\cdot e+a^2 = x^2-2\cdot x\cdot e+e^2+y^2$$
$$\frac{x^2\cdot e^2}{a^2}-x^2-y^2-e^2+a^2 = 0$$
$$\frac{x^2\cdot e^2-a^2}{a^2}-y^2 = e^2-a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{e^2-a^2} = 1$$

a, **hlavní poloosa**, je vzdálenost hlavních vrcholů od počátku soustavy souřadnic (nebo středu), $e^2 - a^2 = b^2$, což je **vedlejší poloosa**

Bude-li hlavní poloosa rovnoběžná s osou y, prohodí se a a b ve jmenovatelích a prohodí se znaménko u x a y

Pro střed S[m; n]: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Obecná rovnice hyperboly: $a \cdot x^2 - b \cdot y^2 + c \cdot x + d \cdot y + e = 0, a > 0, b > 0$ se dá upravit na středový tvar

1) Napište osovou rovnici hyperboly, jestliže je a=2, b=2 a ohniska leží na ose x

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

2) Napište osovou rovnici hyperboly, jestliže je b=3,5, e=5 a ohniska leží na ose y

ŘEŠENÍ $\frac{y^2}{12{,}75} - \frac{x^2}{12{,}25} = 1 \; \textit{totéž jako} \; \frac{4 \cdot y^2}{51} - \frac{4 \cdot y^2}{49} = 1$

3) Zjistěte souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a délky jejích poloos, je-li hyperbola dána rovnicí:

   a) $\frac{(y+1)^2}{3} - (x+2) = 1$ b) $25 \cdot (x-3)^2 - 16 \cdot (y-7)^2 = 400$

   ŘEŠENÍ b) S[3;7], a=16, b=25, e^2=881

4) Rozhodněte, je-li daná rovnice rovnicí hyperboly, a v kladném případě určete střed, směr hlavní osy a délky poloos:

   a) $x^2 - 4 \cdot y^2 - 6 \cdot x - 16 \cdot y - 11 = 0$

$$x^2 - 6 \cdot x - 4 \cdot y^2 - 16 \cdot y = 11$$
$$x^2 - 6 \cdot x + 9 - 4 \cdot (y^2 + 4 \cdot y + 4) = 11 + 9 - 16$$
$$(x-3)^2 - 4 \cdot (y+2)^2 = 20$$
$$\frac{(x-3)^2}{20} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$
$$S[3; -2], a = \sqrt{20}, b = \sqrt{5}, e = 5$$

hlavní poloosa rovnoběžná s osou x (minus je u y)

   b) $4 \cdot x^2 - 5 \cdot y^2 + 24 \cdot x + 20 \cdot y + 36 = 0$

   c) $9 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 + 36 \cdot x + 8 \cdot y + 32 = 0$

5) Napište rovnici hyperboly, je-li dáno:

   a) vrcholy A[-3, -2], B [7; -2], délka vedlejší poloosy b = 3

   vrcholy leží na přímce y = -2; jejich vzdálenost = $2a = 10 \Rightarrow a = 5; e = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$;

   střed leží mezi A a B – S [2, -2]

$$\frac{-(x-2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

   b) vrcholy A[2, 3], B [2; -5], ohnisko F [2; 4]

   c) ohniska F [-6; 0], G [4; 0], délka hlavní osy 2a = 6

Vzájemná poloha kuželoseček a přímky

Přímka může mít s kuželosečkou (kružnicí, elipsou a hyperbolou) společný buď jeden bod, pak ji označíme za tečnu, nebo dva body, pak ji nazveme sečnou, nebo žádný bod – vnější přímka. Tuto situaci posoudíme tak, že do rovnice kuželosečky dosadíme souřadnice bodu z přímky. Je-li přímka zadána pomocí obecné rovnice nebo směrnicového tvaru, pak z ní jednu souřadnici vyjádříme proti druhé a dosadíme; je-li zadána parametrickou přímkou, můžeme dosadit za x i y do rovnice kuželosečky, vyřešit rovnici s jedinou neznámou – parametrem – a pak dopočítat souřadnice.

U paraboly se může kromě tečny, sečny a vnější přímky objevit přímka kolmá na řídící přímku, která má s parabolou také společný jeden bod.

1. Určete vzájemnou polohu křivky k a daných přímek; v případě neprázdného průniku určete souřadnice společných bodů:

   a) $k: x^2 + y^2 = 25$

   $p: 3\cdot x - y - 5 = 0\,; q: 4\cdot x - 3\cdot y + 25 = 0\,; r: x - y + 8 = 0$

   b) $y^2 = 4\cdot x$

   $p: x - 2\cdot y + 3 = 0\,; q: x - 2\cdot y + 4 = 0\,; r: x - y + 3 = 0\,; s: y - 2 = 0$

   c) $k: 9\cdot x^2 + 25\cdot y^2 = 225$

   p: $4\cdot x + 5\cdot y - 26 = 0\,; q: 4\cdot x + 5\cdot y - 25 = 0\,; r: 4\cdot x + 5\cdot y - 24 = 0$

   d) $k: 4\cdot x^2 - y^2 = 64$

   $p: 10\mathrm{cdot}\, x - 3\cdot y - 32 = 0\,; q: 2\cdot x + 3\cdot y - 8 = 0\,; r: 2\cdot x - y + 4 = 0\,; s: 3\cdot x - y + 2 = 0\,; u: 2\cdot x - y = 0$

2. Je dána křivka k a přímka p. Určete hodnotu parametru c tak, aby přímka p byla tečnou křivky k, a potom určete souřadnice příslušného dotykového bodu:

   a) $k: y^2 + 3\cdot x + 4\cdot y - 8 = 0\,; p: x + 4\cdot y + c = 0$

   b) $k: (x-3)^2 = 2\cdot c\cdot (y+2)\,; p: x + y + 2 = 0$

   c) $k: x^2 + y^2 - 6\cdot x + 4\cdot y + 8 = 0\,; p: x + 2\cdot y + c = 0$

   d) $k: x^2 - 4\cdot y^2 = 36\,; p: x - y + c = 0$

Tečna v bodě $T[x_0; y_0]$:

s kružnicí: $(x-m)\cdot(x_0 - m) + (y-n)\cdot(y_0 - n) = r^2$,

s elipsou: $b^2\cdot(x-m)\cdot(x_0 - m) + a^2\cdot(y-n)\cdot(y_0 - n) = a^2\cdot b^2$, je-li hlavní osa orvnoběžná s osou x,

s hyperbolou: $b^2\cdot(x-m)\cdot(x_0 - m) - a^2\cdot(y-n)\cdot(y_0 - n) = a^2\cdot b^2$, je-li hlavní osa orvnoběžná s osou x,

s parabolou: $(y-n)\cdot(y_0 - n) = p\cdot(x + x_0 - 2\cdot m)$, , je-li hlavní osa orvnoběžná s osou x.

3. Napište rovnici tečny t ke křivce v bodě $T \in k$:

   a) $y^2 = 4\cdot x\,, T[1; 2]$

   b) $k: x^2 - 2\cdot x - 4\cdot y - 23 = 0\,; T[7; y_0]$

   c) $k: x^2 + y^2 = 25\,; T[3; 4]$

   d) $k: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25\,; T[-1; y_0],\, y_0 < 0$

   e) $9\cdot x^2 - 4\cdot y^2 = 36\,; T[x_0; 4],\, x_0 > 0$

Odvození rovnice asymptot hyperboly

Hledáme vzájemnou polohu obecné přímky y=kx+q a hyperboly se středem S[0;0] a poloosami a, b

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(k\cdot x+q)^2}{b^2}=1$$
$$x^2\cdot b^2-(k\cdot x+q)^2\cdot a^2=a^2\cdot b^2$$
$$x^2\cdot b^2-(k^2\cdot x^2+2\cdot k\cdot q\cdot x+q^2)\cdot a^2=a^2\cdot b^2$$
$$x^2\cdot b^2-k^2\cdot x^2\cdot a^2-2\cdot k\cdot q\cdot x\cdot a^2-q^2\cdot a^2=a^2\cdot b^2$$
$$x^2(b^2-k^2\cdot a^2)-2\cdot k\cdot q\cdot a^2\cdot x-q^2\cdot a^2-a^2\cdot b^2=0$$

Aby to byla kvadratická rovnice, nesmí být koeficient u kvadratického členu nulový, tedy:

$$b^2-k^2\cdot a^2\neq 0$$
$$k^2\cdot a^2\neq b^2$$
$$k^2\neq\frac{b^2}{a^2}$$
$$k\neq\frac{b}{a}\vee k\neq-\frac{b}{a}$$

Bude-li tento člen nulový, rovnice se změní na lineární, která může mít jedno nebo žádné řešení:

$$-2\cdot k\cdot q\cdot a^2\cdot x-(q^2\cdot a^2+a^2\cdot b^2)=0$$
$$-2\cdot k\cdot q\cdot a^2\cdot x=a^2(q^2+b^2)$$
$$-2\cdot k\cdot q\cdot x=q^2+b^2$$

Je zjevné, že pro q=0 rovnice nemá žádné řešení (žádný společný bod přímek y=kx a y=-kx s hyperbolou) a pro q různé od 0 má právě jedno řešení (jeden společný bod přímek y=kx a y=-kx s hyperbolou)

Přímky $y=\frac{b}{a}\cdot x$ a $y=-\frac{b}{a}\cdot x$ nemají s hyperbolou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ žádný společný bod, procházejí jejím středem a nazývají se asymptoty hyperboly.

Příklady na vzájemnou polohu přímky a hyperboly

6) Zjistěte vzájemnou polohu hyperboly a přímky o rovnicích:
   a) x^2-y^2=9, x-y-6=0 b) $4x^2$-$9y^2$=72, 2x-y-8=0 c) $16x^2$-$9y^2$=144, 20x-9y-18=0
   ŘEŠENÍ b) tečna; T[9/2;1]
7) Napište rovnici asymptot hyperboly o rovnici:
   a) $9x^2$-$4y^2$=72 b) $25x^2$-$16y^2$=400 c) $9x^2$-$16y^2$=144 d) $16x^2$-$9y^2$=144
   ŘEŠENÍ c) y=3/4x; y=-3/4x