Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Máme-li porovnávat, sčítat a odčítat lomené výrazy, musíme je převádět na porovnatelné „roviny“ - u lomených výrazů upravit tak, aby měly stejné jmenovatele. Podobně jako u zlomků číselných i u lomených výrazů se hodnota lomeného výrazu nezmění, vynásobíme-li čitatel a jmenovatel stejným (nenulovým!!!) výrazem. Proto při rozšiřování je třeba i stanovit podmínku rozšiřitelnosti.

Příklad 1:

Zjistěte, zda jsou výrazy $\frac{16\cdot x^8\cdot y^4}{2\cdot x^6\cdot y^2}$ a $8\cdot x^2\cdot y^2$ shodné?

Řešení:

Buď mohu druhý výraz napsat jako zlomek $\frac{8\cdot x^2\cdot y^2}{1}$ a čitatel i jmenovatel rozšířit výrazem $2\cdot x^6\cdot y^2$ za podmínky $x, y\neq 0$.

Nebo mohu v prvním výrazu zkrátit (tedy vydělit čitatel i jmenovatel stejným výrazem, zde $2\cdot x^6\cdot y^2$) a dostanu výraz $8\cdot x^2\cdot y^2$. 1. výraz má smysl pro x a y různé od nuly.

Proto jsou oba výrazy shodné za podmínky $x, y\neq 0$.

Příklad 2:

Zjistěte, zda jsou výrazy $\frac{16\cdot x^8-y^4}{2\cdot x^2-y}$ a $\frac{(2\cdot x^2+y)^2\cdot(2\cdot x^2-y)^2\cdot(4\cdot x^4+y^2)}{(4\cdot x^4-y^2)\cdot(2\cdot x^2-y)}$ shodné?

Řešení:

Nejprve stanovím pro oba dva výrazy podmínky (definiční obory platnosti), Pro 1. výraz $2\cdot x^2-y\neq 0$, tedy $x^2\neq\frac{y}{2}$, pro 2. výraz $2\cdot x^2-y\neq 0$, tedy $x^2\neq\frac{y}{2}$, a $4\cdot x^4-y^2=(2\cdot x^2-y)\cdot(2\cdot x^2+y)\neq 0$, tedy $x^2\neq\frac{\pm y}{2}$.

Při stanovování podmínky jsem již upravoval jmenovatel, bude jednodušší pokračovat v úpravě 2. výrazu:

$$\frac{(2\cdot x^2+y)^2\cdot(2\cdot x^2-y)^2\cdot(4\cdot x^4+y^2)}{(4\cdot x^4-y^2)\cdot(2\cdot x^2-y)}=\frac{(2\cdot x^2+y)^2\cdot(2\cdot x^2-y)^2\cdot(4\cdot x^4+y^2)}{(2\cdot x^2+y)\cdot(2\cdot x^2-y)\cdot(2\cdot x^2-y)}=(2\cdot x^2+y)\cdot(4\cdot x^4+y^2)$$

Teď musím upravit i 1. výraz:

$$\frac{16\cdot x^8-y^4}{2\cdot x^2-y}=\frac{(4\cdot x^4-y^2)\cdot(4\cdot x^4-y^2)}{2\cdot x^2-y}=\frac{(2\cdot x^2-y)\cdot(2\cdot x^2+y)\cdot(4\cdot x^4-y^2)}{2\cdot x^2-y}=(2\cdot x^2+y)\cdot(4\cdot x^4-y^2)$$

Za podmínky $x^2\neq\frac{\pm y}{2}$ (kdy mají oba výrazy smysl) jsou si výrazy rovny.

Příklad 3:

Zkraťte výrazy a) $\frac{17\cdot a}{34\cdot c}$ b) $\frac{25\cdot x^2\cdot y}{5\cdot x\cdot y^2}$ c) $\frac{15\cdot q^3\cdot r^2\cdot s}{18\cdot q^2\cdot r^3\cdot s^2}$ d) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

Řešení: $\frac{a}{2\cdot c}$, $c\neq 0$; $\frac{5\cdot x}{y}$ $x, y\neq 0$; $\frac{5\cdot q}{6\cdot r\cdot s}$, $q, r, s\neq 0$; $a-b$, $a\neq -b$

Příklad 4:

Rozšiřte výraz $\frac{x}{y}$ výrazem $x+y$

Řešení:

Výraz má smysl pro $y\neq 0$, jeho rozšíření má smysl jen pro $x\neq -y$: $\frac{x\cdot(x+y)}{y\cdot(x+y)}=\frac{x\cdot y+x^2}{x\cdot y+y^2}$.

Další příklady: Učebnice strana 86-87; Sbírka strana 65/2.74 – 66/2.77