Iracionální rovnice

Iracionální rovnice je rovnice s jednou neznámou, která se vyskytuje pod odmocninou. Její řešení vede k upevnění poznatku počítání s mocninami.
Řeší se tak, že rovnici umocníme, abychom se zbavili jedné odmocniny, upravíme tak, aby na jedné straně zůstala případná druhá odmocnina, a postup zopakujeme. Protože při umocnění rozšiřujeme počet řešení, je zkouška součástí řešení a musíme ji provést proto, abychom případné „falešné“ řešení odhalili.

Příklad 1:

$\sqrt{2\cdot(x-3)}=3-x$

Řešení:

$\sqrt{2\cdot(x-3)}=3-x$ rovnici umocníme, tedy každou stranu zvlášť

$\left(\sqrt{2\cdot(x-3)}\right)^2=(3-x)^2$

$2\cdot x-6=9-6\cdot x+x^2$

$0=15-8\cdot x+x^2$

$0=(x-3)\cdot(x-5)$

$x_1=3\,;\,x_2=5$

Zkouška je součástí řešení, proto:

$x_1=3: L=\sqrt{2\cdot(3-3)}=0\,;\,P=3-3=0\,;\,L=P$

$x_2=5: L=\sqrt{2\cdot(5-3)}=2\,;\,P=3-5=-2\,;\,L\neq P$

Řešením je pouze číslo 3, $P=\{3\}$

Příklad 2:

$\frac{\sqrt{4\cdot x-3}}{2}=\frac{x}{2}-1$

Řešení:

$\frac{\sqrt{4\cdot x-3}}{2}=\frac{x}{2}-1$ Před umocněním rovnici vynásobíme (obě strany) 2 a pak umocníme:

$\left(\sqrt{4\cdot x-3}\right)^2=(x-2)^2$

$4\cdot x-3=x^2-4\cdot x+4$

$0=x^2-8\cdot x+7$

$0=(x-1)\cdot(x-7)$

$x_1=1\,;\,x_2=7$

Opět musíme provést zkoušku:

$x_1=1: \frac{\sqrt{4\cdot 1-3}}{2}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}\,;\,P=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\,;\,L\neq P$

$x_2=7: \frac{\sqrt{4\cdot 7-3}}{2}=\frac{\sqrt{28-3}}{2}=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}\,;\,P=\frac{7}{2}-1=\frac{5}{2}\,;\,L=P$

$P=\{7\}$

Příklad 3:

$\sqrt{4\cdot x^2-\sqrt{8\cdot x+5}}=2\cdot x+1$

Řešení:

$\sqrt{4\cdot x^2-\sqrt{8\cdot x+5}}=2\cdot x+1$ Dvě odmocniny, pokud nejsou v součinu, v rovnosti bez dalších členů nebo v součtu/rozdílu porovnávány s nulou, vždy vedou k tomu, že budeme muset umocňovat dvakrát. První umocnění povede k rovnici:

$$4\cdot x^2-\sqrt{8\cdot x+5}=(2\cdot x+1)^2$$
$$4\cdot x^2-\sqrt{8\cdot x+5}=4\cdot x^2+4\cdot x+1$$
$$-\sqrt{8\cdot x+5}=4\cdot x+1$$

Teď přijde druhé umocnění:

$$8\cdot x+5=(4\cdot x+1)^2$$
$$8\cdot x+5=16\cdot x^2+8\cdot x+1$$
$$4=16\cdot x^2$$
$$\frac{1}{4}=x^2\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\wedge x_2=-\frac{1}{2}$$

Musíme provést zkoušku:

$$x_1=\frac{1}{2}: L=\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-\sqrt{8\cdot\frac{1}{2}+5}}=\sqrt{1-\sqrt{9}}=\sqrt{1-3}\,nelze$$ není řešením

$$P=\frac{2\cdot 1}{2}+1=1$$

$$x_2=-\frac{1}{2}: L=\sqrt{4\cdot-\frac{1}{4}-\sqrt{8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5}}=\sqrt{1-\sqrt{1}}=0$$ je řešením

$$P=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

$$P=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Příklad 3:

$$\sqrt{2\cdot x+5}+\sqrt{x-1}=8$$

Řešení:

$\sqrt{2\cdot x+5}+\sqrt{x-1}=8$ Zde, i kdybychom převedli jednu odmocninu na druhou stranu, po umocnění se zbavíme jen jedné odmocniny. Záleží na tom, zda nám bude více vadit součin výrazů pod odmocninou nebo převedení odmocniny. Ukážeme si oba postupy:

$$\left(\sqrt{2\cdot x+5}+\sqrt{x-1}\right)^2=64$$
$$2\cdot x+5+2\sqrt{(2\cdot x+5)\cdot(x-1)}+x-1=64$$
$$3\cdot x+4+2\sqrt{2\cdot x^2+4\cdot x-5}=64$$
$$2\sqrt{2\cdot x^2+4\cdot x-5}=60-3\cdot x$$
$$4\cdot\left(2\cdot x^2+3\cdot x-5\right)=(60-3\cdot x)^2$$
$$8\cdot x^2+12\cdot x-20=3600-360\cdot x+9\cdot x^2$$
$$-x^2+372\cdot x-3620=0$$
$$x^2-372\cdot x+3620=0$$

$$\sqrt{2\cdot x+5}=8-\sqrt{x-1}$$
$$2\cdot x+5=64-16\cdot\sqrt{x-1}+x-1$$
$$x-58=-16\cdot\sqrt{x-1}$$
$$x^2-116\cdot x+3364=256\cdot x-256$$
$$x^2-372\cdot x+3620=0$$

Různými cestami jsme se dostali ke stejné rovnici, která má řešení:

$$D=(-372)^2-4\cdot 3620=138384-14480=123904$$
$$x_1=\frac{372+352}{2}=362\wedge x_2=\frac{372-352}{2}=10$$

Zkouška:

$x_1=362: L=\sqrt{2\cdot 362+5}+\sqrt{362-1}=\sqrt{724-5}+\sqrt{361}=\sqrt{719}+19$ evidentně více než 8; 362 tedy není řešením

$x_2=10: L=\sqrt{2\cdot 10+5}+\sqrt{10-1}=\sqrt{25}+\sqrt{9}=5+3=8\wedge P=8$ 10 je řešením

$P=\{8\}$