Goniometrické rovnice – Určení čísla podle goniometrické funkce

Teď to začne být zajímavé – jedno číslo odpovídá dvěma hodnotám (ve dvou kvadrantech), navíc musíme brát v úvahu, že výsledek dostáváme na jednotkové kružnici a musíme tedy přičítat všechny celé násobky $2\cdot\pi$!

1) Podle znamínka určíme příslušné kvadranty
2) Najdeme odpovídající číslo (kladnému číslu) v prvním kvadrantu
3) Převedeme do příslušných kvadrantů
4) Přidáme celé násobky $2\cdot\pi$, tedy $+k\cdot 2\cdot\pi=+2\cdot k\cdot\pi$; v případě tg a cotg přičítáme celé násobky π

Příklad 1:

Určete řešení $\sin x=-0{,}5$

Řešení:

ad 1) záporné číslo a sinus => 3. a 4. kvadrant

ad 2) $\sin x_0=0{,}5\Rightarrow x_0=\frac{\pi}{6}$

ad 3) 3. kvadrant: $x_1=\pi+x_0=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\cdot\pi}{6}$; 4. kvadrant: $x_2=2\cdot\pi-x_0=2\cdot\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\cdot\pi}{6}$

ad 4) $x_1=\frac{7\cdot\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$; $x_2=\frac{11\cdot\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

Příklad 2:

Určete řešení $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Řešení:

ad 1) kladné číslo a cosinus => 1. a 4. kvadrant

ad 2) $\cos x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_0=\frac{\pi}{6}$

ad 3) 1. kvadrant: $x_1=x_0=\frac{\pi}{6}$; 4. kvadrant: $x_2=2\cdot\pi-x_0=2\cdot\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\cdot\pi}{6}$

ad 4) $x_1=\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$; $x_2=\frac{11\cdot\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

Příklad 3:

Určete řešení $tg\,x=-5$

Řešení:

ad 1) záporné číslo a tangens => 2. kvadrant

ad 2) $tg\,x_0=5\Rightarrow x_0=1{,}37$

ad 3) 2. kvadrant: $x_1=\pi+x_0=\pi+1{,}37=4{,}51$

ad 4) $x_1=4{,}51+k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

Příklad 4:

Určete řešení $3\cdot\cos x=-2$

Řešení:

cos x má hodnoty v intervalu $\langle -1\,;1\rangle$, rovnice $\cos x=-2$ by neměla řešení, zadána je ale rovnice

$3\cdot\cos x=-2$, proto ji upravíme na $\cos x=-\frac{2}{3}$ a řešíme podle postupu:

ad 1) záporné číslo a cosinus => 1. a 4. kvadrant

ad 2) $\cos x_0=\frac{2}{3}\Rightarrow x_0=0{,}84$

ad 3) 1. kvadrant: $x_1=x_0=0{,}84$; 4. kvadrant: $x_2=2\cdot\pi-x_0=6{,}28-0{,}84=5{,}44$

ad 4) $x_1=0{,}84+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$; $x_2=5{,}44+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

Příklad 5:

Určete řešení $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Řešení:

Další typ rovnice, nejprve vyřešíme rovnici $\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pak vyřešíme $x+\frac{\pi}{6}=y$

ad 1) kladné číslo a sinus => 1. a 2. kvadrant

ad 2) $\sin y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_0=\frac{\pi}{4}$

ad 3) 1. kvadrant: $y_1=y_0=\frac{\pi}{4}$; 4. kvadrant: $y_2=\pi-y_0=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\cdot\pi}{4}$

ad 4) $y_1=\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$; $y_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

$$x_1+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi=\frac{\pi}{12}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$x_2+\frac{\pi}{6}=\frac{3\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi\Rightarrow x_1=\frac{3\cdot\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi=\frac{7\cdot\pi}{12}+2\cdot k\cdot\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$