Funkce

Definice funkce:

*Funkce je zobrazení z množiny A reálných čísel do množiny B reálných čísel a to takové, že každému prvku z množiny A je přiřazen **právě jeden** prvek z množiny B.*
Zápisu y = f(x) říkáme funkční předpis.
Proměnná x je nezávisle proměnná z množiny A, množině A říkáme **definiční obor funkce** (a značíme **Df**).
Proměnná y je závisle proměnná z množiny B (její hodnota závisí na konkrétním čísle x), množině B říkáme **obor hodnot funkce** (a značíme **Hf**).

Příklad 1:

Je dána funkce $f(x): y = \frac{3 \cdot x - 5}{x + 7}$.
a) určete její hodnoty pro x = -3; -2; 0; 7,
b) pro která x dosahuje hodnoty 12; -2; 32,
c) určete definiční obor,
d) určete průsečíky s osami.

Řešení:

ad a) $f(-3): y = \frac{3 \cdot (-3) - 5}{-3 + 7} = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}$

$f(-2): y = \frac{3 \cdot (-2) - 5}{-2 + 7} = \frac{-11}{5}$

$f(0): y = \frac{3 \cdot (0) - 5}{0 + 7} = \frac{-5}{7}$

$f(7): y = \frac{3 \cdot (7) - 5}{7 + 7} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

ad b) $f(x) = 12 \Rightarrow 12 = \frac{3 \cdot x - 5}{x + 7} \Rightarrow 12 \cdot x + 84 = 3 \cdot x - 5 \Rightarrow x = \frac{-89}{9}$

$f(x) = -2 \Rightarrow -2 = \frac{3 \cdot x - 5}{x + 7} \Rightarrow -2 \cdot x - 14 = 3 \cdot x - 5 \Rightarrow x = \frac{-9}{5}$

$f(x) = 32 \Rightarrow 32 = \frac{3 \cdot x - 5}{x + 7} \Rightarrow 32 \cdot x + 224 = 3 \cdot x - 5 \Rightarrow x = \frac{-229}{29}$

ad c) Výraz $\frac{3 \cdot x - 5}{x + 7}$ má smysl (jako zlomek) jen tehdy, je-li ve jmenovateli nenulové číslo, tedy pro $x \neq -7$. Definiční obor jsou tedy reálná čísla kromě čísla -7: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$

Grafické znázornění funkce

Kromě předpisu se dá funkce znázornit tabulkou, kde jeden řádek představuje libovolné hodnoty z definičního oboru a druhý řádek vypočítané hodnoty podle funkčního předpisu.

Kartézská soustava souřadnic

Abychom se dorozuměli, používáme takovou soustavu souřadnic, která splňuje několik kritérií:
1.přímky, kterým říkáme **osy**, jsou na sebe kolmé – *vodorovnou* označujeme *x*, *svislou y*;protínají se v **počátku soustavy souřadnic**, ten označujeme O
2.mají stejné měřítko, jednotky stejné délky
3.počátkem je každá osa rozdělena na dvě polopřímky, jedním směrem (doprava nebo nahoru) kladnou, počínaje nulou, druhým směrem (doleva nebo dolů) zápornou, počínaje nulou
Vynesení konkrétního bodu odpovídajícího funkci znamená najít jeho obraz na ose x, jeho obraz na ose y a průsečík rovnoběžek s těmito osami procházejícími těmito obrazy.

Průsečíky grafu funkce s osami

Průsečíky grafu s osami jsou velmi významné body. Všeobecně mají body na ose x y-ovou souřadnici 0 a x-ovou libovolnou – X[x; 0].Body na ose y x-ovou souřadnici 0 a y-ovou libovolnou – Y[0; y].
A nyní se na některé funkce podíváme podrobněji.

Příklad 2:

Je dána funkce $f(x): y=\frac{3\cdot x-5}{x+7}$. Určete průsečíky s osami.

Řešení:

Průsečíky s osami jsou body, které leží na ose x (y=0) nebo na ose y (x=0):

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{-5}{7} \Rightarrow Y\left[0;-\frac{5}{7}\right]$$

$$y=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \Rightarrow X\left[\frac{5}{3};0\right]$$

Vlastnosti funkcí

Monotónnost průběhu funkcí

Funkce je **rostoucí**, pokud s rostoucím x roste i y.

$$\forall x \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkce je **klesající**, pokud s rostoucím x roste i y.

$$\forall x \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkce je **nerostoucí**, pokud s rostoucím x roste i y.

$$\forall x \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funkce je **neklesající**, pokud s rostoucím x roste i y.

$$\forall x \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Extrémy funkce

Extrémem funkce je hodnota, která je menší (nebo větší) než všechny ostatní hodnoty funkce.
Funkce má v bodě x_{min} mimimum, pokud $\forall x \in D_f: f(x) > f(x_{min})$

Funkce má v bodě x_{max} maximum, pokud $\forall x \in D_f : f(x) < f(x_{max})$

Souměrnost funkce

Funkce, která je souměrná podle osy y, se nazývá sudá funkce.
$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$
Funkce, která je souměrná podle počátku soustavy souřadnic, se nazývá lichá funkce.
$\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = -f(-x)$

Příklad 3:

Rozhodněte, zda funkce $y = x^4 - x^2$ je sudá nebo lichá (či není souměrná vůbec).

Řešení:

Sudá: $\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$
Lichá: $\forall x \in D_f : -x \in D_f \wedge f(x) = -f(-x)$
Funkce $y = x^4 - x^2$ má definiční obor všechna reálná čísla, takže podmínka, že opačné číslo patří taky do definičního oboru, je splněna.
$f(x) = x^4 - x^2$
$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2$
Platí $f(x) = f(-x)$ a funkce je sudá.