Exponenciální rovnice

Pro všechna reálná čísla x , y a pro každé reálné kladné číslo a různé od nuly platí: Je-li $a^x = a^y$, pak $x = y$.

Příklad 1:

a) $7^{3\cdot x-1} = 7^{2-3\cdot x}$ b) $4^{x-1} = 2^{2-x}$ c) $\frac{1}{16^{3\cdot x}} = 8^{2-2\cdot x}$

Řešení:

a) exponenty (mocnitelé) se musí rovnat => $3\cdot x-1 = 2-3\cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Zkouška: $L = 7^{3\cdot\frac{1}{2}-1} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; $P = 7^{2-3\cdot\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; $L = P$ $P = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) nejprve musíme upravit tak, aby základy mocniny byly stejné – $4 = 2^2$

$\left(2^2\right)^{x-1} = 2^{2-x}$ => $\left(2^2\right)^{x-1} = 2^{2-x}$, pak můžeme dát do rovnosti exponenty (mocnitele)

$2\cdot x-2 = 2-x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Zkouška: $L = 4^{\frac{4}{3}-1} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$; $P = 2^{2-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$; $L = P$ $P = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

c) opět musíme nejprve upravit tak, aby základy mocnin byly stejné. Nejprve můžeme levou stranu upravit na tvar $16^{-3\cdot x}$.

Nepomůže nám, že $16 = 2\cdot 8$, ale to, že $16 = 2^4$ a $8 = 2^3$.

Pak rovnici upravíme na tvar: $\left(2^4\right)^{-3\cdot x} = \left(2^3\right)^{2-2\cdot x}$, která se dá napsat $2^{-12\cdot x} = 2^{6-6\cdot x}$.

Teď můžeme dát do rovnosti exponenty: $-12\cdot x = 6-6\cdot x \Rightarrow x = -1$

Zkouška: $L = \frac{1}{16^{3\cdot -1}} = \frac{1}{16^{-3}} = 16^3 = 4096$; $P = 8^{2-2\cdot(-1)} = 8^{2+2} = 8^4 = 4096$; $L = P$ $P = \{-1\}$

Příklad 2:

a) $10^{x-5} = \frac{2^{3-x}}{5^{x-3}}$ b) $\sqrt[x+1]{4^{x-3}} = 2^{2\cdot x-4}$ c) $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$

Řešení:

Zkouška:

a) základy mocnin musí být stejné, můžeme upravit levou stranu:

$10^{x-5} = (2\cdot 5)^{x-5} = 2^{x-5}\cdot 5^{x-5}$; můžeme upravit pravou stranu: $\frac{2^{3-x}}{5^{x-3}} = 2^{3-x}\cdot 5^{-(x-3)} = 2^{3-x}\cdot 5^{3-x}$

Je vidět, že v obou případech máme základ 10 (na levé straně byla úprava zbytečná, na pravé straně bychom měli udělat ještě poslední krok, abychom dostali $10^{x-5} = 10^{3-x}$).

Pak se rovnají i exponenty: $x-5 = 3-x \Rightarrow x = 4$

Zkouška: $L = 10^{4-5} = 10^{-1} = 0{,}1$; $P = \frac{2^{3-4}}{5^{4-3}} = \frac{2^{-1}}{5} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $L = P$ $P = \{4\}$

b) Musíme upravit levou stranu $\sqrt[x+1]{4^{x-3}} = 4^{\frac{x-3}{x+1}} = \left(2^2\right)^{\frac{x-3}{x+1}} = 2^{\frac{2\cdot(x-3)}{x+1}}$. Poznámka: $x \neq -1$, exponent by pak neměl smysl

Pak máme na obou stranách rovnice stejné základy mocniny a můžeme dát do rovnosti exponenty: $\frac{2\cdot(x-3)}{x+1} = 2\cdot x-4 \Rightarrow 2\cdot x-6 = 2\cdot x^2-2\cdot x-4 \Rightarrow 0 = 2\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow 0 = 2\cdot(x-1)^2 \Rightarrow x = 1$

Zkouška: $L = \sqrt[1+1]{4^{1-3}} = \sqrt{4^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $P = 2^{2\cdot 1-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $L = P$ $P = \{1\}$

c) Opět musíme upravit rovnici tak, aby viděli exponent a měli stejné základy:

$\sqrt{3^x}=\sqrt[3]{9}\Rightarrow 3^{\frac{x}{2}}=3^{\frac{2}{3}}$.

Pak můžeme dát do rovnosti exponenty: $\frac{x}{2}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

Zkouška: $L=\sqrt{3^{\frac{4}{3}}}=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$; $P=\sqrt[3]{9}$; $L=P$ $P=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

Příklad 3:

a) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$ b) $\frac{1}{2}\cdot 2^{x-1}=4^{x-1}$

Řešení:

a) Tady těch úprav máme více. Musíme vidět, že $32=2^5$; $0{,}25=\frac{1}{4}=2^{-2}$ a $128=2^7$.

Pak se dá rovnice napsat ve tvaru $\left(2^5\right)^{\frac{x+5}{x-7}}=2^{-2}\cdot\left(2^7\right)^{\frac{x+17}{x-3}}\Rightarrow 2^{\frac{5\cdot(x+5)}{x-7}}=2^{-2+\frac{7\cdot(x+17)}{x-3}}$.

Teď máme na obou stranách mocniny o stejném základu a můžeme položit do rovnosti exponenty těchto mocnin:

$$\frac{5\cdot x+25}{x-7}=-2+\frac{7\cdot x+119}{x-3}\Rightarrow\frac{5\cdot x+25}{x-7}=\frac{-2\cdot x+6+7\cdot x+119}{x-3}\Rightarrow\frac{5\cdot x+25}{x-7}=\frac{5\cdot x+125}{x-3}$$

Vynásobíme obě strany $(x-7)\cdot(x-3)$ a dostaneme $(5\cdot x+25)\cdot(x-3)=(5\cdot x+125)\cdot(x-7)$

Po roznásobení: $5\cdot x^2+10\cdot x-75=5\cdot x^2+90\cdot x-875$

a po převedení na jednu stranu $80\cdot x-800=0\Rightarrow x=10$

Zkouška: $L=32^{\frac{10+5}{10-7}}=32^{\frac{15}{3}}=32^5=33554432$;

$P=0{,}25\cdot 128^{\frac{10+17}{10-3}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{27}{7}}=0{,}25\cdot\left(2^7\right)^{\frac{27}{7}}=0{,}25\cdot 2^{27}=33554432$; $L=P$ $P=\{10\}$

b) Upravíme rovnici $2^{-1}\cdot 2^x-1=\left(2^2\right)^{x-1}\Rightarrow 2^{-1+x-1}=2^{2\cdot x-2}$ a dáme do rovnosti exponenty:

$x-2=2\cdot x-2\Rightarrow x=0$

Zkouška: $L=\frac{1}{2}\cdot 2^{0-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; $P=4^{0-1}=4^{-1}=\frac{1}{4}$; $L=P$ $P=\{0\}$

Příklad 4:

a) $3^{x+1}+9^x=108$ b) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

Řešení:

a) Tady už je to těžší, ani po úpravě $3^{x+1}+3^{2\cdot x}=3^3\cdot 2^2$ jsme nedostali tvar $a^x=a^y$.
Můžeme ještě provést úpravu $3\cdot 3^x+3^{2\cdot x}=3^3\cdot 2^2$. Dokud neuvidíme, že $3^{2\cdot x}=(3^x)^2$ a že je v rovnici „schována kvadratická rovnice, nepohneme se dál.

$3\cdot 3^x+(3^x)^2=3^3\cdot 2^2$ Když místo 3^x dosadíme jiné písmeno z , dostaneme kvadratickou rovnici $z^2+3\cdot z-108=0$, kterou umíme řešit $z_1=-12; z_2=9$. A zpětně:

$3^x=-12$ řešení nemá; $3^x=9\Rightarrow x=2$.

Zkouška: $L=3^{2+1}+9^2=3^3+9^2=27+81=108$; $P=108$; $L=P$ $P=\{2\}$

b) Tady se – zdánlivě – nic udělat nedá. Pokud ale převedeme mocniny se stejným základem na stejnou stranu, upravíme a vytkneme, dostaneme se dál:

$$7\cdot 3^{x+1}-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$$
$$7\cdot 3\cdot 3^x-3^4\cdot 3^x=5^2\cdot 5^x-5^3\cdot 5^x$$
$$3^x\cdot(21-81)=5^x\cdot(25-125)$$
$$3^x\cdot(-60)=5^x\cdot(-100)$$
$$3^x\cdot 3=5^x\cdot 5$$
$$3^{x+1}=5^{x+1}$$

Znalci exponenciální funkce vědí, že všechny exponenciální funkce se protínají pro

$x=0$ a že tedy v exponentu musí být nula => $x=-1$

Pro slabší povahy můžeme ještě upravit $\frac{3^{x+1}}{5^{x+1}}=1\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{0}$ a dostaneme stejný výsledek x=-1

Ještě zkouška: $L=7\cdot3^{-1+1}-5^{-1+2}=7\cdot3^{0}-5^{1}=7-5=2$; $P=3^{-1+4}-5^{-1+3}=3^{3}-5^{2}=27-25=2$;

$L=P$ $P=\{-1\}$