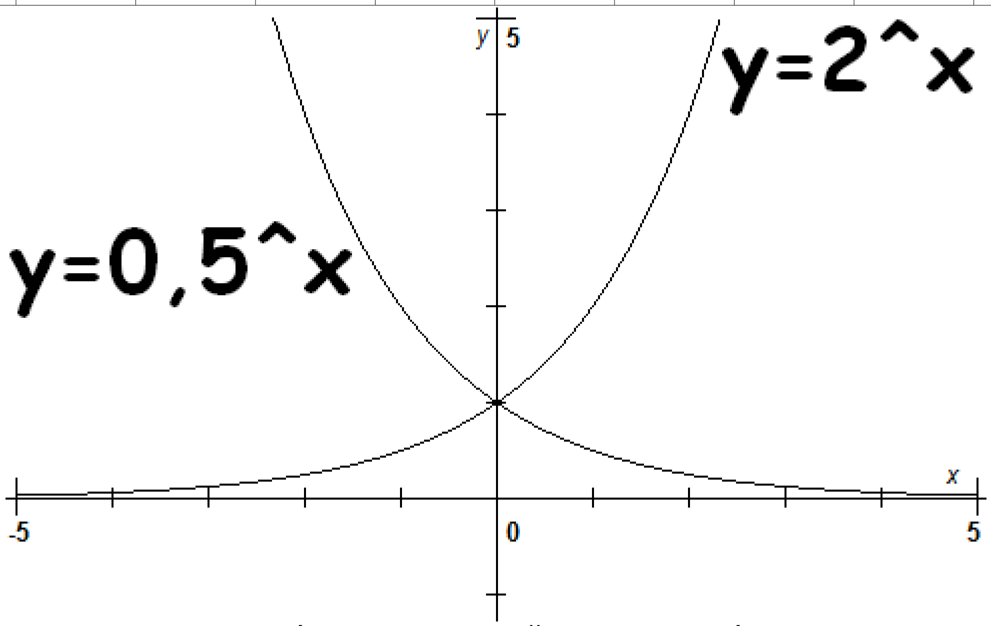
Exponenciální funkce

Mocninné funkce $y=x^n$ měly nezávisle proměnnou v základu mocniny, za n jsme dosazovali přirozená čísla (a -1). Tentokrát bude základ „pevný“, reálné číslo a exponentem bude nezávisle proměnná.
Exponenciální funkce: $y=a^x$, kde $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.
Kdyby a bylo číslo záporné, funkce by byla „divná“ - pro sudá x kladná, pro záporná x záporná, zkrátka by „skákala“. Kladná mocnina umocněná na 0 se rovná 1, takže všechny funkce budou procházet bodem [0; 1]. Pro další seznámení si budeme muset nakreslit nějaký konkrétní graf.
Zvolme $y=2^x$:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	16

Zvolme $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	16	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



Grafy funkce vyneseme do jedné soustavy souřadnic. Pro základ $a=2$ je funkce rostoucí, pro základ $\frac{1}{2}$ je funkce klesající. Pro $a=2$ je pro kladná x funkční hodnota větší než 1 a pro záporná x menší než 1; u funkce se základem a= $\frac{1}{2}$.
To se dá zobecnit a platí:

Vlastnosti exponenciálních funkcí

$a>1$: funkce je rostoucí; $\forall x<0: 0<f(x)<1$
$x=0: f(x)=1$
$\forall x>0: f(x)>1$

Poznámka: všechny hodnoty jsou kladné, funkce je omezená zdola hodnotou 0; $D_f=\mathbb{R}$; $H_f=(0;\infty)$

$0<a<1$: funkce je klesající; $\forall\, x<0: f(x)>1$
$x=0: f(x)=1$
$\forall\, x>0: 0<f(x)<1$

Poznámka: všechny hodnoty jsou kladné, funkce je omezená zdola hodnotou 0; $D_f=\mathbb{R}$; $H_f=(0;\infty)$

Příklad 1:

Rozhodněte, která funkce je klesající a která rostoucí:

a) $y=\pi^x$ b) $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ c) $y=0{,}95^x$ d) $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^x$ e) $y=1{,}25^x$

Řešení

a) $\pi>1$ => funkce je rostoucí

b) $\frac{5}{3}>1$ => funkce je rostoucí

c) $0{,}95<1$ => funkce je klesající

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$ => funkce je rostoucí

e) $1{,}25>1$ => funkce je rostoucí

Příklad 2:

Rozhodněte, zda platí
a) $1{,}25^{0{,}5}>1{,}25^{0{,}4}$ b) $0{,}95^{7{,}5}<0{,}95^{6{,}1}$ c) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ d) $11{,}11^{-1{,}24}<11{,}11^{-7{,}4}$

Řešení

a) $1{,}25>1$ funkce je rostoucí => pro vyšší x je vyšší i funkční hodnota => nerovnost platí
b) $0{,}95<1$ funkce je klesající => pro vyšší x je funkční hodnota nižší => nerovnost platí
c) $\sqrt{2}>1$ funkce je rostoucí => nerovnost neplatí
d) nerovnost neplatí

Příklad 3:

Rozhodněte, zda platí nerovnosti:

a) $\forall\, x>0: \left(\frac{2}{3}\right)^x>\left(\frac{3}{2}\right)^x$ b) $\forall\, x<0: \left(\frac{2}{3}\right)^x>(3)^x$ c) $\forall\, x>0: (\sqrt{2})^x<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

Řešení

a) pro $x>0$ platí, že funkce se základem a>1 má všechny funkční hodnoty větší než 1 => $\left(\frac{3}{2}\right)^x>1$; funkce se základem a<1 má všechny funkční hodnoty menší než 1 => $\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$ => nerovnost neplatí
b) pro $x<0$ platí, že funkce se základem a>1 má všechny funkční hodnoty menší než 1 => $(3)^x<1$; funkce se základem a<1 má všechny funkční hodnoty větší než 1 => $\left(\frac{2}{3}\right)^x>1$ => nerovnost platí
c) nerovnost neplatí