Binomická věta pro $(a+b)^n$.

Nejspíš už znáte vzorce pro n = 1, n = 2 a n = 3:

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Postupně vymyslíme vzorec pro $(a+b)^n$

$(a+b)^n=(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)$, kde závorek je dohromady n.

Jejich roznásobením dostaneme členy obsahující mocniny ***a*** a ***b***, kde součet mocnin dá ***n*** (počet závorek); mezi členy tak bude $a^n\cdot b^0=a^n$ nebo $a^2\cdot b^{n-2}$ nebo $a^4\cdot b^{n-4}$, obecně $a^k\cdot b^{n-k}$

Teď nás zajímá, kolik takových členů bude. Vybíráme ze závorek, na jejich pořadí nezáleží, závorky se nemohou opakovat – kombinace, kde ***k***-tice je kolik vybírám ***a***, celkem je ***n*** závorek.

a^n 1×, jediná možnost, jak vybrat ***a*** ze všech závorek (b je na nultou, což je jedna, to nepíšu)

$a^{n-1}\cdot b^1$ n×, n závorek, ze kterých vyberu ***b***

$a^{n-2}\cdot b^2$ $K_k(n)=\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}$

$a^k\cdot b^{n-k}$ $K_k(n)=\binom{n}{k}$

A teď to můžeme spojit dohromady:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2+...\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k++...+\binom{n}{n}b^n$$

Příklad

Pomocí binomické věty vypočtěte $(x-1)^5$.

$x^5-5\cdot x^4+10\cdot x^3-10\cdot x^2+5\cdot x-1$

Příklad

Užitím binomické věty vypočítejte $1{,}01^6$.

$$(1+0{,}01)^6=\binom{6}{0}1^6+\binom{6}{1}\cdot 1^5\cdot 0{,}01+\binom{6}{2}\cdot 1^4\cdot 0{,}01^2+\binom{6}{3}\cdot 1^3\cdot 0{,}01^3+\binom{6}{4}\cdot 1^2\cdot 0{,}01^4+\binom{6}{5}\cdot 1^1\cdot 0{,}01^5+\binom{6}{6}\cdot 0{,}01^6$$

Mocniny 1 jsou stále jenom jedna, kombinační čísla jsou řádek z Pasalova trojúhelníku, mocniny 0,01 spočítám

$$(1+0{,}01)^6=1+6\cdot 0{,}01+15\cdot 0{,}01^2+20\cdot 0{,}01^3+15\cdot 0{,}01^4+6\cdot 0{,}01^5+0{,}01^6=1{,}061520150601$$

Příklad

Určete desátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(2\cdot x^3-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$ k je 9, protože první k je 0!

$$k=9;\binom{12}{9}\cdot(-2\cdot x^3)^{12-9}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9=-\binom{12}{3}\cdot(2\cdot x^3)^3\cdot 2^4\cdot\sqrt{2}\cdot x^{-9}=-220\cdot 2^3\cdot x^9\cdot 2^4\cdot x^{-9}=220\cdot 2^7\cdot\sqrt{2}=-28\,160\cdot\sqrt{2}$$

Příklad

Určete, kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $(2\cdot x^3+3\cdot x^2)^{10}$ obsahuje x^{23} .

$$\binom{10}{k}\cdot(2\cdot x^3)^{10-k}\cdot(3\cdot x^2)^k=\binom{10}{k}\cdot 2^{10-k}\cdot(x^3)^{10-k}\cdot 3^k\cdot x^{2\cdot k}=\binom{10}{k}\cdot 2^{10-k}\cdot 3^k\cdot x^{30-3\cdot k}\cdot x^{2\cdot k}=\binom{10}{k}\cdot 2^{10-k}\cdot 3^k\cdot x^{30-k}$$

a protože obsahuje x^{30-k} , které se má rovnat x^{23} , je $k=7$, což znamená, že to je 8. člen, s koeficientem $\binom{10}{3}\cdot 2^3\cdot 3^7$

Příklad

Spočítejte $0{,}94^5$ bez kalkulačky

$$0{,}94^5=(1-0{,}06)^5=1-5\cdot 0{,}06+10\cdot 0{,}06^2-10\cdot 0{,}06^3-5\cdot 0{,}06^4+0{,}06^5$$

$$0{,}94^5=1-0{,}3+0{,}036-0{,}00216+0{,}00006480-0{,}0000007776=1{,}0366480000-0{,}3021607776=0{,}73390402224$$

Příklad

Spočítejte $1{,}3^5$ bez kalkulačky

Příklad

Pomocí binomické věty rozepište $(x^2+2\cdot x)^6$

Příklad

Určete, kolikátý člen rozvoje $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ neobsahuje x. Nápověda: kolikátá mocnina x neobsahuje x.

Příklad

Proč je $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots\binom{n}{k}\ldots+\binom{n}{n}$, kde n je nezáporné celé číslo, roven 2^n ?

Příklad *

Pomocí binomické věty dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo 8^n-1 dělitelné sedmi.