Aritmetická posloupnost

Př. 1: V továrně dokončí každou hodinu montáž 3 automobilů. Na začátku směny bylo ve skladu (po předchozí směně) 5 neodvezených automobilů. Kolik hotových automobilů bude na skladě na konci směny (po 8 hodinách), pokud v jejím průběhu žádný hotový automobil neodvezou? Příklad řeš jako rekurentní posloupnost.

Př. 2: V zemské troposféře platí, že s rostoucí výškou klesá teplota. Vzrůst nadmořské výšky o 1 km znamená pokles teploty o 6,5 ° C . Urči teplotu v nadmořské výšce 5 km, pokud je při hladině moře 25 °C. Příklad řeš jako rekurentně zadanou posloupnost.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností, urči diference a vzorce pro n-té členy.

Př. 4: Načrtni grafy aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2. Jaký typ funkce je analogií aritmetické posloupnosti?

Př. 5: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké aritmetické posloupnosti. Pokud ano urči diferenci.

a) $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{12}$; 1

b) x^3-3 ; $(x-1)^2$; $(x-2)^2$

Př. 6: Dokaž, že posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Př. 7: U následujících aritmet. posloupností sestav vzorec pro n-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_{13}.

a) $a_1 = 4$, $d = -2$

b) $a_2 = 8$; $d = 5$

c) $[7+(n-1)2]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1=\pi; a_{n+1}=a_n+2\pi; n\in\mathbb{N}$

e) $[-2+n\cdot 3]_{n=1}^{\infty}$

Př. 8: Urči reálné číslo x tak, aby čísla $a_1=x^2-5; a_2=x+5; a_3=x^2+x$ tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Př. 9: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $a_5+a_2=22; a_7-a_3=-16$.

Př. 10: Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_2+a_3+a_4=15, a_3\cdot a_4=40$. Urči a_1, d a a_8 .

Př. 11: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $s_5=s_6=60$.

Př. 12: V aritmetické posloupnosti známe člen $a_4 = 6$. Urči podmínku pro diferenci posloupnosti, aby platilo $s_{12}\geq 210$.

Př. 13: Vyřeš rovnici: $3+7+11+15+...+x=5050$.

Př. 14: S hloubkou roste teplota Země přibližně rovnoměrně o 30 ° C na 1000 m. Jaká bude teplota na dně dolu hlubokého 900 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9 °C? Jaký by byla teplota na dně jednoho z nejhlubších dolů na světě TauTona v JAR v hloubce 3585 m. Porovnej vypočítanou teplotu s teplotou uváděnou v literatuře a vysvětli rozdíl

Př. 15: V obchodě staví propagační pyramidu z plechovek. Kolik plechovek bude na pyramidu potřeba pokud nejnižší řada obsahuje 25 plechovek a každá další řada má o jednu plechovku méně?

Př. 16: Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 105 tašek. Při tom jsou tašky srovnány do řad tak, aby v každé následující řadě bylo o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy?

Př. 17: Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 95 rour, je-li v nejvyšší vrstvě 5 rour? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?

Př. 18: Buduje se hlediště letního kina přibližně pro 1200 diváků. Do první řady je plánována 40 sedadel, do každé následující o čtyři sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?

Př. 19: Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stroje je x metrů látky za jednu hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další uvádí do činnosti vždy po dvou minutách. Kolik metrů látky vyrobí dělník na každém stavu v první hodině směny? Kolik metrů látky vyrobí celkem?

Př. 20: Na buben o průměru d_1 je navíjeno lano s průměrem d_2 . V každé vrstvě je lano navinuto vedle sebe m krát. Urči, jaká je přibližná délka lana navinutého na buben v n vrstvách. Případ řeš obecně i konkrétně pro hodnoty $d_1 = 1,2$ m , $d_2 = 0,04$ m , m = 30 , n = 6 .

Geometrická posloupnost

Př. 1: Poločas rozpadu (doba za kterou se rozpadne polovina existujícího množství látky) francia $^{221}_{87}\mathrm{Fr}$ je přibližně 5 minut. Jaké množství látky po půl hodině z 10 gramů?

Př. 2: Hodnotu peněz neustále snižuje inflace (pomalé průběžné zdražování všech komodit). Například při dlouhodobé průměrné roční inflaci 3% ztratí libovolná částka za rok 3% své hodnoty (tedy například 200 Kč na začátku roku bude mít na konci hodnotu pouze $200\cdot 0{,}97=194\,\mathrm{Kč}$). Jako hodnotu bude mít 500 000 Kč po uplynutí pěti let?

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností., urči kvocienty a vzorce pro n-té členy.

Př. 4: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké geometrické posloupnosti. Pokud ano urči kvocient.

a) $\frac{9}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{9}$

b) $\sqrt{5}-\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Př. 5: Napiš prvních pět členů geometrických posloupností:

a) $a_1=1, q=-2$

b) $a_1=\pi, q=0$

c) $a_1=5, q=-1$

d) $a_1=0, q=0$

Které z těchto posloupností jsou aritmetické?

Př. 6: Dokaž, že posloupnost $\left(5\cdot 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

Př. 7: U následujících geometrických posloupností sestav vzorec pro n-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_6.

a) $a_1=2, q=2$

b) $a_3=1, q=\frac{1}{3}$

c) $\left[3(-1)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1=\sqrt{3}; a_{n+1}=a_n\cdot\sqrt{3}; n\in\mathbb{N}$

e) $\left[3^n\right]n=1^{\infty}$

Př. 8: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_1-a_3=-16; a_1+a_2=8$.

Př. 9: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_7-a_3=15; a_6-a_4=-6$.

Př. 10: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_2\cdot a_4=36; a_2+a_4=13$.

Př. 11: Urči tři reálná čísla větší než 32 a menší než 162 taková, že spolu s čísly 32 a 162 tvoří pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti.

Př. 12: Urči a_1 v geometrické posloupnosti s kvocientem q = 2 , jestliže platí: a_n = 384 a s_n = 765 .

Př. 13: Vyřeš rovnici: x − 3 x + 9 x − 27 x + ... + 729 x = 2735 .

Př.: 14: Baktérie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik baktérií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den. Jak dlouho by trvalo než by hmotnost baktérií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné baktérie je přibližně 6 ·10 − 15 kg . Hmotnost Země 6 ·10 24 kg .

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou přibližně 10x vyšší). Při tetování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních v roce 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo v roce 2050?

Aritmetická posloupnost

Př. 1: V továrně dokončí každou hodinu montáž 3 automobilů. Na začátku směny bylo ve skladu (po předchozí směně) 5 neodvezených automobilů. Kolik hotových automobilů bude na skladě na konci směny (po 8 hodinách), pokud v jejím průběhu žádný hotový automobil neodvezou? Příklad řeš jako rekurentní posloupnost.

Př. 2: V zemské troposféře platí, že s rostoucí výškou klesá teplota. Vzrůst nadmořské výšky o 1 km znamená pokles teploty o 6,5 ° C . Urči teplotu v nadmořské výšce 5 km, pokud je při hladině moře 25 °C. Příklad řeš jako rekurentně zadanou posloupnost.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností, urči diference a vzorce pro n-té členy.

Př. 4: Načrtni grafy aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2. Jaký typ funkce je analogií aritmetické posloupnosti?

Př. 5: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké aritmetické posloupnosti. Pokud ano urči diferenci.

a) $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{12}$; 1

b) x^3-3 ; $(x-1)^2$; $(x-2)^2$

Př. 6: Dokaž, že posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Př. 7: U následujících aritmet. posloupností sestav vzorec pro n-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_{13}.

a) $a_1 = 4$, $d = -2$

b) $a_2 = 8$; $d = 5$

c) $[7+(n-1)2]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1=\pi; a_{n+1}=a_n+2\pi; n\in\mathbb{N}$

e) $[-2+n\cdot 3]_{n=1}^{\infty}$

Př. 8: Urči reálné číslo x tak, aby čísla $a_1=x^2-5; a_2=x+5; a_3=x^2+x$ tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Př. 9: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $a_5+a_2=22; a_7-a_3=-16$.

Př. 10: Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_2+a_3+a_4=15, a_3\cdot a_4=40$. Urči a_1, d a a_8 .

Př. 11: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $s_5=s_6=60$.

Př. 12: V aritmetické posloupnosti známe člen $a_4 = 6$. Urči podmínku pro diferenci posloupnosti, aby platilo $s_{12}\geq 210$.

Př. 13: Vyřeš rovnici: $3+7+11+15+...+x=5050$.

Př. 14: S hloubkou roste teplota Země přibližně rovnoměrně o 30 ° C na 1000 m. Jaká bude teplota na dně dolu hlubokého 900 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9 °C? Jaký by byla teplota na dně jednoho z nejhlubších dolů na světě TauTona v JAR v hloubce 3585 m. Porovnej vypočítanou teplotu s teplotou uváděnou v literatuře a vysvětli rozdíl

Př. 15: V obchodě staví propagační pyramidu z plechovek. Kolik plechovek bude na pyramidu potřeba pokud nejnižší řada obsahuje 25 plechovek a každá další řada má o jednu plechovku méně?

Př. 16: Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 105 tašek. Při tom jsou tašky srovnány do řad tak, aby v každé následující řadě bylo o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy?

Př. 17: Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 95 rour, je-li v nejvyšší vrstvě 5 rour? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?

Př. 18: Buduje se hlediště letního kina přibližně pro 1200 diváků. Do první řady je plánována 40 sedadel, do každé následující o čtyři sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?

Př. 19: Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stroje je x metrů látky za jednu hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další uvádí do činnosti vždy po dvou minutách. Kolik metrů látky vyrobí dělník na každém stavu v první hodině směny? Kolik metrů látky vyrobí celkem?

Př. 20: Na buben o průměru d_1 je navíjeno lano s průměrem d_2 . V každé vrstvě je lano navinuto vedle sebe m krát. Urči, jaká je přibližná délka lana navinutého na buben v n vrstvách. Případ řeš obecně i konkrétně pro hodnoty $d_1 = 1,2$ m , $d_2 = 0,04$ m , m = 30 , n = 6 .

Geometrická posloupnost

Př. 1: Poločas rozpadu (doba za kterou se rozpadne polovina existujícího množství látky) francia $^{221}_{87}\mathrm{Fr}$ je přibližně 5 minut. Jaké množství látky po půl hodině z 10 gramů?

Př. 2: Hodnotu peněz neustále snižuje inflace (pomalé průběžné zdražování všech komodit). Například při dlouhodobé průměrné roční inflaci 3% ztratí libovolná částka za rok 3% své hodnoty (tedy například 200 Kč na začátku roku bude mít na konci hodnotu pouze $200\cdot 0{,}97=194\,\text{Kč}$). Jako hodnotu bude mít 500 000 Kč po uplynutí pěti let?

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností., urči kvocienty a vzorce pro n-té členy.

Př. 4: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké geometrické posloupnosti. Pokud ano urči kvocient.

a) $\frac{9}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{9}$

b) $\sqrt{5}-\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Př. 5: Napiš prvních pět členů geometrických posloupností:

a) $a_1=1, q=-2$

b) $a_1=\pi, q=0$

c) $a_1=5, q=-1$

d) $a_1=0, q=0$

Které z těchto posloupností jsou aritmetické?

Př. 6: Dokaž, že posloupnost $\left(5\cdot 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

Př. 7: U následujících geometrických posloupností sestav vzorec pro n-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_6.

a) $a_1=2, q=2$

b) $a_3=1, q=\frac{1}{3}$

c) $\left[3(-1)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1=\sqrt{3};a_{n+1}=a_n\cdot\sqrt{3};n\in\mathbb{N}$

e) $\left[3^n\right]n=1^{\infty}$

Př. 8: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_1-a_3=-16;a_1+a_2=8$.

Př. 9: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_7-a_3=15;a_6-a_4=-6$.

Př. 10: Urči a_1 a q geometrické posloupnosti, pro kterou platí $a_2\cdot a_4=36;a_2+a_4=13$.

Př. 11: Urči tři reálná čísla větší než 32 a menší než 162 taková, že spolu s čísly 32 a 162 tvoří pět po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti.

Př. 12: Urči a_1 v geometrické posloupnosti s kvocientem q = 2 , jestliže platí: a_n = 384 a s_n = 765 .

Př. 13: Vyřeš rovnici: x − 3 x + 9 x − 27 x + ... + 729 x = 2735 .

Př.: 14: Baktérie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik baktérií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den. Jak dlouho by trvalo než by hmotnost baktérií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné baktérie je přibližně 6 ·10 − 15 kg . Hmotnost Země 6 ·10 24 kg .

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou přibližně 10x vyšší). Při tetování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních v roce 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo v roce 2050?